

Frankfurt /m 1968

R. Schade.



Mittlere Ladungen und kinetische Energien  
der primären Spaltbruchstücke von  $U^{235}$ .

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu

Frankfurt am Main

vorgelegt von

R o l f   S c h a d e

aus

Helmstedt

Oktober 1967

**Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen  
Fakultät der Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main**



**Dekan: Professor Dr. W. Martienssen**  
**1. Gutachter: Professor Dr. G. Süßmann**  
**2. Gutachter: Professor Dr. E. Schopper**

**Tag der mündlichen Prüfung: 17. Februar 1968**

## Inhaltsverzeichnis

|     |                                          |    |
|-----|------------------------------------------|----|
| 1.  | Problemstellung                          | 1  |
| 2.  | Grundlagen der Rechnung                  | 4  |
| 3.  | Berechnung der Minima der Energie        | 7  |
| 3.1 | Die Massenformel von Myers und Swiatecki | 7  |
| 3.2 | Paarenergie                              | 11 |
| 3.3 | Krümmungsenergie                         | 12 |
| 3.4 | Parametrisierung der Kernoberfläche      | 21 |
| 3.5 | Beschreibung des Programms               | 22 |
| 4.  | Diskussion der Ergebnisse                | 24 |
| 5.  | Literaturverzeichnis                     | 32 |
| 6.  | Erläuterungen der Abbildungen            | 34 |
| 7.  | Abbildungen                              | 36 |



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41545303\\_0043](https://archive.org/details/IA41545303_0043)

## 1. Problemstellung

Seitdem Hahn und Straßmann<sup>1</sup> im Jahre 1939 die Kernspaltung entdeckt haben, ist über den Spaltprozeß ein umfangreiches Beobachtungsmaterial zusammengetragen worden, dessen theoretische Durchdringung zum großen Teil noch aussteht. Es seien daher einige wichtige experimentelle Befunde referiert, die von einer Theorie der Kernspaltung wiedergegeben werden müssen.

Schwere Kerne, also solche mit einem Spaltparameter<sup>†</sup>  $\chi \geq 0,4$ , spalten sich mit großer Wahrscheinlichkeit in zwei ungleich schwere Bruchstücke auf, während die leichten Kerne sich bevorzugt symmetrisch spalten.<sup>‡</sup> Als Beispiel sei angeführt, daß das wahrscheinlichste Massenverhältnis der Bruchstücke bei der Spaltung von Uran etwa 1.5 beträgt. Die Spaltung in zwei Bruchstücke mit diesem Massenverhältnis ist etwa 700 mal so häufig wie die symmetrische Spaltung.

Unterschiedlich ist auch das Verhalten der Bruchstücke leichter und schwererer Kerne bezüglich ihrer kinetischen Energie: bei den leichten Kernen liegt das Maximum der kinetischen Energie der Bruchstücke bei symmetrischer Spaltung, während bei den schweren Kernen die kinetische Energie der Bruchstücke zu symmetrischer Spaltung hin stark abfällt. Die Differenz zwischen der maximalen kinetischen Energie und der bei symmetrischer Spaltung beträgt nach den Messungen von Schmitt<sup>2</sup> et.al. bei  $M^{235} + n$  etwa 24 MeV.

Die Ladungen der Bruchstücke sind bisher am genauesten für die Spaltung von  $M^{235} + n$  gemessen<sup>3 - 7</sup>. Bei einigen Bruchstücken weicht das Verhältnis der Zahl der Protonen zu der Zahl der Neutronen erheblich von dem entsprechenden Verhältnis des spaltenden Kernes ab. (s. Abb. 1 und 2)

---

<sup>†</sup> Der Spaltparameter  $\chi$  ist, wie in der Literatur üblich, definiert durch  $\chi = \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{krit}}$ .  $(Z^2/A)_{krit}$  gibt den kleinsten Wert von  $Z^2/A$  an, bei dem die Spaltung ohne Zuführung von Energie erfolgt.

<sup>‡</sup> Die im folgenden angegebenen Zahlen beziehen sich auf die Spaltung mit thermischen Neutronen.



Die ersten Ansätze zu einer theoretischen Beschreibung des Spaltprozesses stammen von N.Bohr und J.A.Wheeler<sup>8</sup>. Auf der Basis des Tröpfchenmodells berechneten sie die Gestalt des Compoundkernes im Sattelpunkt. In der Rechnung wurden nur symmetrische Deformationen des Kernes zugelassen. Die Schwellenenergie wurde als Differenz der Bindungsenergien im Sattelpunkt und im Grundzustand berechnet. Dabei wurden allerdings Näherungsformeln für die Berechnung der Oberflächenenergie und der Coulombenergie des deformierten Kernes verwandt. Nach dem Kriege bestand eine der ersten friedlichen Anwendungen der elektronischen Rechenmaschine Eniac in der Wiederholung dieser Rechnungen durch Frankel und Metropolis<sup>9</sup>.

Die Eigenschaften des Compoundkernes im Sattelpunkt sind in der Folgezeit genau untersucht worden, insbesondere von Swiatecki<sup>10</sup> sowie von Cohen und Swiatecki<sup>11</sup>. Die Hoffnung, möglicherweise hier die Erklärung für die Bevorzugung der asymmetrischen Spaltung bei den schweren Kernen zu finden, erfüllte sich jedoch nicht.

Eine vollständige klassische Theorie der Kernspaltung müßte die folgenden drei Schritte umfassen:

- 1.) Berechnung der Hamiltonfunktion

$$H(\mathcal{L}, \dot{\mathcal{L}}) = V(\mathcal{L}) + T(\mathcal{L}, \dot{\mathcal{L}}).$$

$V$  ist die statische, potentielle Energie und  $T$  die kinetische Energie des Kernes.  $\mathcal{L}$  ist ein Satz von Parametern, der die Gestalt des Kernes festlegt.

- 2.) Berechnung der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Anfangszustände.
- 3.) Lösung der Bewegungsgleichung für die verschiedenen Anfangszustände.

Nix<sup>12</sup> hat eine derartige Rechnung auf der Basis des Tröpfchenmodells durchgeführt. Die von ihm berechneten Verteilungen der Massen und der kinetischen Energien der Bruchstücke stimmen bei den leichten Kernen gut mit den Meßwerten überein. Bei den schweren Kernen versagt dagegen das reine Tröpfchenmodell.

Eine Analyse der Meßdaten führt zu der Vermutung, daß die Spaltung der schweren Kerne durch die magische Protonenzahl 50 sowie durch die magischen Neutronenzahlen 50 und 82 beeinflusst wird. Liese Meitner<sup>13</sup> hat darauf hingewiesen, daß die asymmetrische Spaltung der schweren Kerne eine Folge der Schalenstruktur sein



könnte. Den Einfluß der Schalenstruktur auf die kinetischen Energien der Bruchstücke haben Vandenbosch<sup>14</sup>, Fong<sup>15</sup> und Schade<sup>16</sup> nachzuweisen versucht.

Rechnungen im Rahmen einer vollständigen, quasiklassischen Theorie, in der zwar der Bewegungsablauf klassisch behandelt, die potentielle Energie jedoch mit realistischen Einteilchenpotentialen berechnet wird, scheinen heute noch nicht durchführbar zu sein. Als Kompromiß zwischen Tröpfchenmodell und Schalenmodell bietet sich die Massenformel von Myers und Swiatecki<sup>17</sup> an. Diese ist vom Typ der Weizsäcker-Bethe<sup>18</sup> Formel; sie enthält jedoch zusätzlich einen deformationsabhängigen Term, der den Einfluß der Struktur der Einteilchenniveaus auf die Bindungsenergie des Kernes beschreibt.

In der vorliegenden Arbeit werden mit Hilfe der Massenformeln von Myers und Swiatecki<sup>17, 19</sup> die kinetischen Energien der Bruchstücke als Funktion ihres Massenverhältnisses und die Verteilung der Protonen auf die Bruchstücke für vorgegebene Massen der Bruchstücke berechnet. Die Rechnungen sind als erster Schritt einer vollständigen Theorie zu betrachten.

Da der Kern im Verlauf der Spaltung Gestalten mit größerer Krümmung annehmen kann, wurde die Massenformel um einen Term erweitert, der den Einfluß der Krümmung auf die Bindungsenergie des Kernes darstellt. Die Größe der Krümmungsenergie wurde einmal aus dem Fermigasmodell abgeschätzt und zum anderen durch optimale Anpassung an die Meßdaten bestimmt.



## 2. Grundlagen der Rechnung

Im Bilde des Tröpfchenmodells verläuft die Spaltung in der folgenden Weise: der zu spaltende Kern wird zum Beispiel mit Neutronen oder  $\alpha$ -Teilchen beschossen. Die Summe aus kinetischer Energie und Bindungsenergie des Geschosses in dem zu spaltenden Kern dient dazu, diesen anzuregen. Unter anderem wird die Anregungsenergie auch dazu verwandt, den Kern zu deformieren. Dabei wirkt die Oberflächenspannung als rücktreibende Kraft, während die Coulombwechselwirkung der Protonen bestrebt ist, den Kern auseinander zu treiben. Der Sattelpunkt ist gekennzeichnet durch das Gleichgewicht dieser beiden Kräfte. Zwischen dem Grundzustand und dem Sattelpunkt überwiegt die rücktreibende Kraft, jenseits des Sattelpunktes die Coulombwechselwirkung. Sobald die Deformation des Kernes so groß geworden ist, daß der Kern sich jenseits des Sattelpunktes befindet, vergrößert sich die Deformation ständig, bis der Kern schließlich zerreißt. Die beiden Bruchstücke fliegen dann mit großer Geschwindigkeit auseinander. Die kinetische Energie der Bruchstücke ist bis auf Korrekturen, die im folgenden behandelt werden, gleich der gegenseitigen Coulombenergie der Bruchstücke im Zerreißpunkt. Die kinetische Energie, die der Kern auf dem Wege vom Sattelpunkt zum Zerreißpunkt gewinnt, trägt ebenfalls zur kinetischen Energie der Bruchstücke bei. Da aber die Oberflächenspannung die Bewegung vom Sattelpunkt zum Zerreißpunkt hemmt und Sattelpunkt und Zerreißpunkt nicht sehr weit von einander entfernt sind, ist anzunehmen, daß die auf dem Wege vom Sattelpunkt zum Zerreißpunkt gewonnene kinetische Energie klein ist im Vergleich zur Coulombabstoßung der Bruchstücke im Zerreißpunkt. Dagegen würde eine durch die gegenseitige Coulombabstoßung verursachte Polarisierung der Bruchstücke im Zerreißpunkt die gegenseitige Coulombenergie verringern, da in diesem Fall die Protonen im Mittel weiter von der Berührungsstelle entfernt sind als die Neutronen. Dieser Effekt soll aber ebenso vernachlässigt werden wie die Möglichkeit, daß bei der allmählichen Änderung der Gestalt der Bruchstücke während des Fluges ein Teil der gegenseitigen Coulombenergie in innere Anregungsenergie der Bruchstücke übergeht.



Zur Bestimmung der kinetischen Energie der Bruchstücke berechnen wir die Gestalten der Bruchstücke im Zerreißpunkt. Wir veranschaulichen uns den Verlauf der Spaltung in Abb. 3. In dieser Abbildung sei  $\mathcal{A}$  ein Satz von Parametern, der die Gestalt des Kernes beschreibt. Für die Dimension des Parameterraumes ist 2 gewählt.

$\mathcal{S}$  sei der Grundzustand,  $\mathcal{S}$  der Sattelpunkt und  $\mathcal{Z}$  die Linie, an der der Kern auseinanderreißt. Auf dem Wege von  $\mathcal{S}$  nach  $\mathcal{Z}$  bilden sich die Bruchstücke langsam heraus. Bis  $\mathcal{Z}$  ist noch ein Austausch von Nukleonen möglich, danach ist klassisch die Zahl der Nukleonen in den Bruchstücken festgelegt. Die Bahn B sei eine Lösung der Bewegungsgleichung. Sie führt vom Sattelpunkt zu einem Zustand, der durch zwei von einander entfernte Bruchstücke mit festgelegten Massen und einer bestimmten kinetischen Energie charakterisiert ist. Bis auf die erwähnten Korrekturen ist also die kinetische Energie der Bruchstücke bestimmt durch die Gestalten der beiden Bruchstücke im Moment des Zerreißens. Im folgenden soll angenommen werden, daß die Spaltung mit thermischen Neutronen erfolgt. Die Bindungsenergie des eingefangenen Neutrons ist im Sattelpunkt nahezu vollständig in Deformationsenergie verwandelt. Daher wird der Kern das Bestreben haben, sich vom Sattelpunkt zum Minimum der potentiellen Energie zu bewegen. Er erreicht dabei ein Stadium, in dem die beiden Bruchstücke sich gerade noch berühren. Dieses Stadium wird als Zerreißpunkt bezeichnet. Für vorgegebene Massen der beiden Bruchstücke ist die potentielle Energie im Zerreißpunkt eine Funktion der Gestalt der beiden Bruchstücke. Diese Funktion besitzt ein Minimum. Die beiden Bruchstücke werden eine Zeit um diese Gleichgewichtslage schwingen. Wir nehmen an, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden Bruchstücke im Moment der Trennung eine bestimmte Gestalt besitzen, wesentlich nur von der Wahrscheinlichkeit abhängt, mit der sich das System in diesem Zustand befindet. Aus der Annahme, daß das System sich ähnlich einem niedrig angeregten, quantenmechanischen harmonischen Oszillator verhält, folgt, daß die wahrscheinlichsten Gestalten der beiden Bruchstücke im Moment der Trennung die sind, für die bei vorgegebenen Massen der beiden Bruchstücke die potentielle Energie minimal ist. Die Häufigkeitsverteilung der kinetischen Energie der Bruchstücke für vorgegebene Massen der Bruchstücke ließe sich mit diesen Annahmen aus den Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators berechnen<sup>27, 28</sup>. In der vorliegenden Arbeit sind aber lediglich die Minima der potentiellen Energie für die verschiedenen Massen der Bruchstücke ermittelt.



Ein weiterer Freiheitsgrad, der neben den Gestalten der beiden Bruchstücke bei der Minimalisierung der potentiellen Energie berücksichtigt werden muß, ist die Aufteilung der Neutronen und Protonen auf die Bruchstücke bei festgehaltener Massenzahl. Die berechneten Ladungen der Bruchstücke können ebenso wie die kinetischen Energien mit den Ergebnissen neuerer Messungen verglichen werden.



### 3. Berechnung der Minima der Energie.

#### 3.1. Die Massenformel von Myers und Swiatecki

Zur Berechnung des Minimums der potentiellen Energie im Zerreißpunkt werden die beiden Massenformeln von Myers und Swiatecki<sup>17,19</sup> benutzt. Die Autoren haben sich bei der Aufstellung dieser Formeln von den folgenden beiden Annahmen leiten lassen:

I.) Die Bindungsenergie eines Kernes läßt sich bei großen Deformationen mit Hilfe des reinen Tröpfchenmodells berechnen.

II.) Schaleneffekte sind eine Folge der Entartung der Einteilchenniveaus bei kugelförmigen Kernen. Mit wachsender Deformation eines Kernes streben sie gegen Null.

Der Tröpfchenmodell-Teil der Formel weicht nur geringfügig von der üblichen Form ab. Er lautet:

$$\begin{aligned}
 & - a_1 \cdot \left( 1 - \kappa \cdot \left( \frac{N-Z}{A} \right)^2 \right) \cdot A \\
 & + a_2 \cdot \left( 1 - \kappa \cdot \left( \frac{N-Z}{A} \right)^2 \right) \cdot A^{2/3} \cdot \sigma \quad (1) \\
 & + \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{\tau_c} \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot g(\text{funkt}) - \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{e^2}{\tau_c} \cdot \left( \frac{d}{\tau_c} \right)^2 \cdot \frac{Z^2}{A}
 \end{aligned}$$

Der erste Term stellt die Volumenenergie dar, der zweite die Oberflächenenergie und der dritte die Coulombenergie. Der zweite Term in der Coulombenergie berücksichtigt den Einfluß der Oberfläche auf die Coulombenergie und zwar bis zur zweiten Näherung einschließlich.  $d$  ist der Parameter, der bei Annahme einer Fermiverteilung für die Protonendichte die Dicke der Oberfläche festlegt. Für ihn wurde der aus Elektronen-Streuexperimenten ermittelte Wert von  $0,5461 \text{ fm}$  angesetzt.  $a_1, a_2$  und  $\kappa$  sind Konstanten, deren Zahlenwerte durch Anpassung an experimentelle Bindungsenergien ermittelt worden sind.  $\tau_c$  ist die Konstante des Kernradius<sup>\*)</sup>. Diese wird ebenfalls durch Anpassung

\*) Ein möglich erscheinender Unterschied zwischen Neutronenradius und Protonenradius wird vernachlässigt.



an die Bindungsenergie bestimmt.  $N$ ,  $Z$  und  $A$  bedeuten Neutronen-, Protonen- und Massenzahl eines Kernes. Das Verhältnis der Oberfläche des Kernes zu der Oberfläche des kugelförmigen Kernes gleicher Nukleonenzahl wird mit  $\sigma$  bezeichnet. Die Funktion  $g$  beschreibt die Abhängigkeit der Coulombenergie von der Gestalt des Kernes. Sie besitzt keine Dimension und nimmt für kugelförmige Kerne den Wert 1 an. Die Volumenenergie hängt von der Zusammensetzung des Kernes ab. Myers und Swiatecki<sup>17,19</sup> haben für die  $N-Z$  Abhängigkeit der Oberflächenenergie dieselbe Form angenommen wie bei der Volumenenergie.

Die Paarenergie ist angesetzt mit  $\pm M/A^{1/2}$  MeV für  $g-g$  bzw.  $m-m$  Kerne und mit Null für Kerne mit ungeradem  $A$ .

In der nach dem Tröpfchenmodell berechneten Energie eines Kernes ist die Entartung der Einteilchenniveaus nicht berücksichtigt. Die Schalenkorrektur läßt sich folglich berechnen als Differenz der Energien eines Kernes, dessen Einteilchenniveaus in bestimmter Weise entartet sind, und eines Kernes mit nichtentarteten Einteilchenniveaus. Myers und Swiatecki<sup>17</sup> haben für diese beiden Fälle ein einfaches Modell herangezogen. Als Modell für den Kern mit nichtentarteten Einteilchenniveaus dient das Fermigasmodell. Das Modell für den Kern mit entarteten Niveaus geht aus diesem hervor, indem die Niveaus des Fermigases gemäß den magischen Zahlen in Gruppen eingeteilt werden. Alle Niveaus, die zu einer Gruppe gehören, werden so verschoben, daß sie in den Schwerpunkt dieser Gruppe zu liegen kommen. Unter diesen Voraussetzungen beträgt die der Niveauverschiebung entsprechende Energiedifferenz  $\Delta E$ :

$$\Delta E = t_F \cdot \frac{\bar{f}(N) + \bar{f}(Z)}{(A/2)^{2/3}} \quad (2)$$

wobei

$$\bar{f}(x) = \frac{3}{5} \frac{M_i^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}}{M_i - M_{i-1}} \cdot (x - M_{i-1}) - \frac{3}{5} \cdot (x^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}) \quad \text{int.} \quad (3)$$

Dabei sind  $M_i$  und  $M_{i-1}$  die beiden magischen Zahlen, zwischen denen  $x$  liegt.  $t_F$  ist die Fermigrenzenergie eines Kernes, dessen Radius  $R = r_c \cdot A^{1/3}$  ist und dessen Protonen- und Neutronenzahl gleich sind.



Die Energiedifferenz ist gleich Null für doppelt magische Kerne. In allen anderen Fällen ist sie größer als Null. Das ist leicht einzusehen: die Energie einer abgeschlossenen Schale wird durch die Bündelung nicht verändert, da alle Niveaus ja in den Schwerpunkt gelegt worden sind, andererseits liegt der Schwerpunkt einer nicht abgeschlossenen Schale tiefer als der einer abgeschlossenen. Um nun zu erreichen, daß  $\Delta E$  sowohl positiv als auch negativ werden kann, wird die Gesamtheit der Schwerpunktniveaus um einen konstanten Betrag nach unten verschoben. Beträgt diese Verschiebung  $-\frac{C}{2^{2/3}}$ , so erhält man für die Energiedifferenz  $\Delta E$ :

$$\Delta E = t_{\mp} \cdot \left( \frac{\bar{T}(N) + \bar{T}(Z)}{(A/2)^{2/3}} - C \cdot A^{1/3} \right) \quad (4)$$

Für den Fall, daß die Entartung der Niveaus nicht vollständig ist, die obige Formel etwas verändert werden.  $b$  sei ein Maß für die Bündelung einer Gruppe von Niveaus und zwar sei die Breite einer Gruppe gleichdem  $(1-b)$ -fachen der entsprechenden ungebündelten Gruppe. Nimmt man an, daß sich die Lage eines Niveaus linear mit  $b$  ändert, so ist  $\Delta E$  proportional zu  $b$ . Bei einer unvollständigen Bündelung muß also in Gl. (4)  $t_{\mp}$  durch  $b \cdot t_{\mp} = \tilde{C}$  ersetzt werden. Die Schalenkorrektur für einen kugelförmigen Kern lautet somit:

$$S(N, Z) = C \cdot \left( \frac{\bar{T}(N) + \bar{T}(Z)}{(A/2)^{2/3}} - C \cdot A^{1/3} \right) \quad (5)$$

Die beiden Parameter  $\tilde{C}$  und  $C$  werden, ebenso wie die Parameter des Tröpfchenmodell-Teiles der Formel, durch Anpassung an die Bindungsenergien der Kerne bestimmt.

Bei der Wahl der Funktion, die die Gestaltabhängigkeit der Schalenkorrektur beschreibt, waren zwei Gesichtspunkte maßgebend: einmal sollte die Schalenkorrektur wegen der Aufhebung der Entartung der Niveaus mit zunehmender Deformation gegen Null gehen und zum anderen sollten mangels genauerer Information alle Gestalten in gleicher Weise erfaßt werden. Diese Forderungen werden von dem Ansatz

$$S(N, Z, \text{gestalt}) = S(N, Z) \cdot e^{-\theta^2} \quad (6)$$



mit 
$$\Theta^2 = \frac{\int d\Omega \cdot (R(\vartheta, \varphi) - R_0)^2}{\int d\Omega \cdot a^2} \quad (7)$$

erfüllt. Dabei ist  $R(\vartheta, \varphi)$  der Radiusvektor, der die Kernoberfläche beschreibt, und  $R_0$  der Radius der volumengleichen Kugel.

Die Anpassung an die Bindungsenergien der stabilen Kerne sowie an die Schwellenenergie von  $\text{Tl}^{201}$  ergab für die freien Parameter der Massenformel die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} a_1 &= 15.677 \quad \text{MeV} , \\ a_2 &= 18.56 \quad \text{MeV} , \\ r_C &= 1.20 \quad \text{fm} , \\ \alpha &= 1.79 \quad , \\ C &= 5.8 \quad \text{MeV} , \\ c &= 0.26 \quad , \\ a/r_C &= 0.27 \quad . \end{aligned}$$

Eine Modifikation<sup>19</sup> dieser Formel, die in verschiedener Hinsicht eine bessere Übereinstimmung mit den Meßdaten ergibt, unterscheidet sich von der ursprünglichen Formel nur in der Wahl der Funktion, die die Gestaltabhängigkeit der Schalenkorrektur beschreibt. Anhand der Nilsson-Diagramme läßt sich nachweisen, daß die Schaleneffekte mit zunehmender Deformation oszillierend abklingen. Die zur Beschreibung dieses Vorganges gewählte Funktion geht allerdings schon nach einmaligem Durchschwingen gegen Null. Sie ist bis auf den Faktor  $-2$  die zweite Ableitung von  $e^{-\Theta^2}$ , nämlich  $(1 - 2\Theta^2) e^{-\Theta^2}$ .

Die Parameter dieser Formel haben die Werte:

$$\begin{aligned} a_1 &= 15.4941 \quad \text{MeV} , \\ a_2 &= 17.9439 \quad \text{MeV} , \\ r_C &= 1.225 \quad \text{fm} , \\ \alpha &= 1.7826 \quad , \\ C &= 5.8 \quad \text{MeV} , \\ c &= 0.325 \quad , \\ a/r_C &= 0.444 \quad . \end{aligned}$$

Die Minima der potentiellen Energie im Zerreißpunkt wurden mit beiden Formeln berechnet.



### 3.2. Paarenergie

In den Massenformeln von Myers und Swiatecki<sup>17,19</sup> war die Paarenergie angesetzt mit  $\pm 11/A^{1/2}$  MeV für  $g-g$  Kerne bzw.  $M-M$  Kerne und mit Null für Kerne mit ungeradem  $A$ . In dieser Form ist sie nur für ganze Nukleonenzahlen definiert. Im Verlauf der Rechnung treten auch nicht-ganze Nukleonenzahlen auf, die als Mittelwerte zu interpretieren sind. Daher ist es erforderlich, eine geeignete Interpolationsformel zur Berechnung der Paarenergie für nicht-ganze Nukleonenzahlen aufzustellen. Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz

$$P(N, Z) = 1/2 \cdot 11/A^{1/2} \cdot (\sin(f(N)) + \sin(f(Z)))$$

mit  $f(x) = \pi \cdot (x - g - 0,5),$

wobei  $g$  die größte gerade Zahl ist, die die Bedingung  $g \leq x$  erfüllt, ergibt für ganze Nukleonenzahlen dieselben Werte für die Paarenergie wie der Ansatz von Myers und Swiatecki<sup>17, 19</sup>.  $P(N, Z)$  besitzt Extremwerte an den Stellen, die  $g-g$  Kernen bzw.  $M-M$  Kernen entsprechen.



### 3.3. Krümmungsenergie

Volumenenergie und Oberflächenenergie bilden einen wesentlichen Teil der halbempirischen Massenformel. Ihre Summe kann als Beginn einer Potenzreihe in  $A^{-1/3}$  aufgefaßt werden:

$$E_B \sim A \cdot (a_\sigma + a_1 \cdot A^{-1/3})$$

Auch das nächste Glied dieser Reihe kann geometrisch interpretiert werden. Das Oberflächenintegral über die lokale Krümmung

$L = \int d\sigma H$  mit  $H = 1/R_1 + 1/R_2$  ergibt gerade einen Ausdruck, der proportional zu  $A^{1/3}$  ist.  $R_1$  und  $R_2$  sind die beiden Hauptkrümmungsradien.

Die Bindungsenergien der Kerne im Grundzustand werden gut von einer Massenformel wiedergegeben, die keinen Krümmungsterm enthält. Diese Tatsache ist nicht schwer zu deuten. Oberflächenenergie und Krümmungsenergie lassen sich nämlich durch ein Integral über die Oberfläche des Kernes ausdrücken:

$$E_S + E_K = \int d\sigma (a_1 + a_2 \cdot H)$$

Da die Kerne im Grundzustand im wesentlichen kugelförmig sind, ist  $H \sim A^{-1/3}$ .  $H$  ändert sich also nur sehr langsam über den ganzen Bereich der Kerne. Daher stellt es eine für viele Anwendungen der Massenformel ausreichende Näherung dar, wenn bei der Anpassung der Parameter der Massenformel an die Bindungsenergien der Kerne im Grundzustand  $a_1 + a_2 \cdot H$  durch  $a_S$ , den Parameter der Oberflächenenergie, ersetzt wird.

Für den Spaltprozess könnte die Krümmungsenergie eine größere Bedeutung haben, da der Kern möglicherweise im Verlauf des Spaltvorganges Gestalten mit großer Krümmung annimmt. Hinzu kommt, daß die Volumenenergie sich während des Spaltprozesses nicht ändert. Damit wächst die Bedeutung der kleineren Terme. Aus diesen Gründen wurde die Krümmungsenergie bei der Berechnung der potentiellen Energie im Zerreißpunkt durch Einfügen eines entsprechenden Termes in die Massenformel von Myers und Swiatecki berücksichtigt.

Nicht nur die Fortsetzung der Potenzreihenentwicklung legt es nahe, als Maß für die Krümmung  $H = 1/R_1 + 1/R_2$  zu benutzen. Das Flächenintegral über die Gaußsche Krümmung  $K = 1/(R_1 \cdot R_2)$  ergibt nach der Integralformel von Gauß-Bonnet  $4\pi$  für einfach zusammenhängende,



geschlossene Flächen. Die Gesamtkrümmung würde sich also bei Benutzung der Gaußschen Krümmung auf dem Weg vom Sattelpunkt zum Zerreißpunkt nicht ändern. Sie würde sich außerdem beim Durchgang durch den Zerreißpunkt sprunghaft verdoppeln.

Das Fermigasmodell soll als einfaches quantenmechanisches Modell des Kernes dazu benutzt werden, die Krümmungsenergie abzuschätzen. Wir betrachten  $A$  freie Nukleonen in einem äußeren Potential von der Art

$$U(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \vec{x} \in \mathcal{V} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{V}$  sei ein Quader mit dem Volumen  $V_P$ , der Oberfläche  $O_P$  und der Krümmung  $L_P$ . Von diesen Größen gehen wir zu dimensionslosen Gestaltparametern  $\sigma_P = \sigma / V_P^{2/3}$  und  $l_P = L_P / V_P^{1/3}$  über.

Die Parameter, die zur Beschreibung von  $\mathcal{V}$  dienen, werden im Unterschied zu den Gestaltparametern des Kernes (also der Nukleonendichte) mit dem Index  $P$  versehen. Hilf und Süßmann<sup>20</sup> haben gezeigt, daß sich mit diesen Annahmen unter Vernachlässigung der Coulombenergie aber mit Berücksichtigung der Spin- und Isospinentartung der folgende Ausdruck für die Bindungsenergie des Kernes ergibt:

$$\begin{aligned} E(A, \rho_c, \sigma_P, l_P) = & \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left( \frac{3}{2} \pi^2 \cdot \rho_c \right)^{2/3} \cdot \left\{ \frac{3}{5} A \right. \\ & + \frac{(18\pi)^{1/3}}{80} \cdot A^{2/3} \cdot \sigma_P \\ & + \left( \frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} \cdot A^{1/3} \cdot \left( \frac{3\pi}{320} \cdot \sigma_P^2 - \frac{1}{5\pi} \cdot l_P \right) \Big\} \\ & + R_P(A, \rho_c) \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbei ist  $\rho_c$  die Nukleonendichte in der Kernmaterie. Mit  $\rho_c = \left( \frac{4}{3} \pi \tau_c^3 \right)^{-1}$ ,  $\tau_c = 1,1 \text{ fm}$  ergibt sich aus diesem Modell die Oberflächenenergie zu 9.2 MeV. Das ist etwas mehr als die Hälfte des experimentellen Wertes.

Der zu  $A^{1/3}$  proportionale Term ist für fast alle denkbaren Kerngestalten negativ. Der zu  $\sigma_P^2$  proportionale Term ist für nicht zu große Werte von  $\sigma_P$  klein gegenüber dem Oberflächenterm. Da er im gleichen Sinn wirkt wie dieser, soll er hier nicht weiter diskutiert werden.



Die aus Gl.(1) erhaltene Krümmungsenergie ist bisher wegen des negativen Vorzeichens nicht ernst genommen worden. Jedoch ist, wie schon Swiatecki bemerkt hat, das Potential nur als Hilfsmittel zur Berechnung der Wellenfunktionen und der Eigenwerte zu betrachten. Als Oberfläche des Kernes ist vielmehr die durch die Nukleonendichte definierte Oberfläche anzusehen. In der Tat ist in allen Rechnungen mit dem Tröpfchenmodell genau diese gemeint. An die Stelle der Gl.(1) hat also eine entsprechende Gleichung zu treten, in der die Parameter, die die Gestalt des Potentials beschreiben, ersetzt werden, durch solche, die den Verlauf der Dichte der Nukleonen beschreiben.

Für die auf die Nukleonendichte bezogenen Größen Volumen, Oberfläche und Krümmung hat G.Süßmann die folgenden Definitionen vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\rho_c} \cdot \int dV \rho(r) , \\ \sigma &= \frac{1}{\rho_c} \cdot \int dV |\text{grad } \rho(r)| , \\ L &= \frac{1}{\rho_c} \cdot \int dV |\text{div grad } \rho(r)| . \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Definitionen sind im Einklang mit den Eigenschaften von Steiner-Flächen, das sind einfach zusammenhängende, geschlossene, parallele Flächen im Abstand  $\xi$ . Für diese gilt nämlich, wenn man nach der 2. Potenz von  $\xi$  abbricht:

$$V = V_0 + \sigma_0 \cdot \xi + \frac{1}{2} L_0 \cdot \xi^2 . \quad (3)$$

In der Gleichung (3) ist  $V$  das von der äußeren Fläche umschlossene Volumen,  $V_0$  das von der inneren Fläche umschlossene Volumen,  $\sigma_0$  die Oberfläche der inneren Fläche und  $L_0$  die über die innere Fläche integrierte lokale Krümmung. In der mathematischen Literatur wird  $L$  noch mit dem Faktor  $1/2$  versehen. Dieser Faktor ist hier fortgelassen worden, damit Gl.(3) auch in der Form den Anfang einer Taylorentwicklung darstellt. Es muß dann gelten:

$$\sigma = \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} , \quad L = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} . \quad (4)$$

Als Beispiel sei mit der Definition (2) die Oberfläche einer Kugel ausgerechnet, beider die Dichte nach außen linear abfällt. Es sei also:



$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq r_a \\ \rho_0 \cdot \frac{r_b - r}{r_b - r_a} & \text{für } r_a \leq r \leq r_b \\ 0 & \text{für } r \geq r_b \end{cases} \quad (5)$$

Die Auswertung des Integrals ergibt  $\sigma = 4\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (r_b^2 + r_b \cdot r_a + r_a^2)$ .

Nimmt man an, daß Potentialfläche und Dichtefläche geschlossene Parallellflächen im Abstand  $b$  sind, so erhält man durch Entwicklung in eine Taylorreihe den folgenden Zusammenhang zwischen den Potential- und den Dichtegrößen:

$$\begin{aligned} V_P &= V + 0 \cdot b + \frac{1}{2} \cdot L \cdot b^2 \\ O_P &= 0 + L \cdot b \\ L_P &= L \end{aligned} \quad (6)$$

Potential- und Dichtefläche sind allerdings nur dann parallel, wenn die Potentialfläche die Oberfläche einer Kugel ist. In jedem anderen Fall ist die Dichtefläche stärker abgerundet als die Potentialfläche. In Analogie zu den Gleichungen (6) wird im allgemeinen Fall der Übergang von der Potentialfläche zur Dichtefläche mit gestaltabhängigen Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  durch

$$\begin{aligned} V_P &= V + 0 \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \beta^2 \\ O_P &= 0 + L \cdot \gamma \\ L_P &= L \end{aligned} \quad (7)$$

beschrieben. Durch Einsetzen der Gleichungen (7) in die Gleichung (1) erhält man:

$$\begin{aligned} E(A, \rho_c, 0, l) &= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \pi^2 \cdot \rho_c \right)^{2/3} \cdot \left\{ \frac{3}{5} A \right. \\ &\quad + \frac{(18\pi)^{1/3}}{80} \cdot A^{2/3} \cdot 0 \\ &\quad - \frac{(12\pi^2)^{1/3}}{120\pi} \cdot A^{1/3} \cdot \left( \varepsilon_f^{1/2} \cdot \alpha - \frac{3\pi}{8} \right) \cdot 0^2 \\ &\quad + (12\pi^2)^{1/3} \cdot A^{1/3} \cdot \left( \frac{\varepsilon_f^{1/2}}{80\pi} \cdot \gamma - \frac{1}{15\pi^2} \right) l \Big\} \\ &\quad + R(A, \rho_c) \end{aligned} \quad (8)$$

$\varepsilon_f$  ist definiert durch die Fermigrenzenergie  $\hbar \varepsilon_f = \varepsilon_f \cdot \frac{\hbar^2}{2m}$ .



Nur der Term, der vom Quadrat der Oberfläche abhängt, und der Krümmungsterm werden vom Übergang von der Potentialfläche zur Dichtefläche beeinflusst. Sie erhalten zusätzliche Beiträge, die vom Oberflächenenergie herrühren.

Gleichung (8) war für den Fall hergeleitet worden, daß die Potentialfläche die Form eines Quaders besitzt. H. Weyl<sup>21</sup> hat jedoch bewiesen, daß der erste Term von Gleichung (8) unabhängig von der Gestalt des Potentials ist. Numerische Prüfungen, ausgeführt von Hilf und Süßmann<sup>20</sup>, haben ergeben, daß der Koeffizient der Oberflächenenergie ebenfalls als gestaltungsunabhängig anzusehen ist. Wir machen daher die Annahme, daß der auf die Dichtefläche bezogene Koeffizient der Krümmungsenergie in Gleichung (8) von der Gestalt des Potentials unabhängig ist.

Die Tatsache, daß die Oberflächenenergie aus Gleichung (8) ganz gut mit dem experimentellen Wert übereinstimmt, läßt hoffen, daß auch die wirkliche Krümmungsenergie nicht zu sehr von dem aus Gleichung (8) berechneten Wert abweicht. Offen bleibt allerdings die Frage nach der Größe des Restterms. Da hierfür keine Abschätzung vorliegt, kann nur angenommen werden, daß im Mittel  $R = \sigma (A^{1/3})$  erfüllt ist.

Zur Berechnung des Koeffizienten der Krümmungsenergie in Gleichung (8) muß der Transformationskoeffizient  $\gamma$  berechnet werden.

Swiatecki<sup>22</sup> hat den Dichteabfall an einer ebenen Wand berechnet. Das hierfür gewählte Potential

$$U(\vec{r}) = U(x) = \begin{cases} \sigma & \text{für } x > 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

beschränkt die  $N$  Wellenfunktionen  $\psi(\vec{x})$  auf den Halbraum  $x > 0$ . Es sind ebene, in  $x$ -Richtung stehende Wellen (wegen  $\psi(0, y, z) = 0$ ), welche in einem Quader mit den Kanten  $a, b, c$  quantisiert und normiert seien:

$$\psi(x, y, z) = (2/(a \cdot b \cdot c))^{1/2} \cdot \exp \{ i(k_y \cdot y + k_z \cdot z) \} \cdot \sin(k_x \cdot x) \quad (10)$$



mit  $\vec{n} := \{n_i\}$ ,  $n_i$  ganzzahlig,  $n_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

$$\vec{k} := \{k_i\} = \pi \cdot \left( \frac{n_1}{a}, \frac{2n_2}{b}, \frac{2n_3}{c} \right).$$

Der mit diesem Ansatz erhaltene Dichteabfall am Rand wird durch eine Gerade angenähert, die durch die beiden Punkte bestimmt ist, an denen die Dichte noch 90% bzw. 10% der Dichte im Mittelpunkt beträgt. Die angenäherte Darstellung der Dichte ist also:

$$\rho(x) = \rho_c \cdot g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq e, \\ \frac{x-e}{d-e} & \text{falls } e \leq x \leq d, \\ 1 & \text{falls } x \geq d, \end{cases} \quad (11)$$

In der Entfernung  $e$  von der unendlich hohen Potentialwand habe die durch die Gerade dargestellte Dichte den Wert Null und in der Entfernung  $d$  den Wert  $\rho_c$  erreicht. Aus der Rechnung von Swiatecki<sup>22</sup> erhält man für  $d$  und  $e$  die Werte:

$$d = 2,1 \cdot \varepsilon_f^{-1/2}, \quad e = 0,3 \cdot \varepsilon_f^{-1/2}.$$

Die Dichtefläche, die sich bei einem vorgegebenen Potentialquader einstellt, wird zunächst mit Hilfe eines einfachen Modells berechnet. Sie liege dort, wo die Dichte auf die Hälfte abgesunken ist. In der Nähe nur einer Wand läßt sich dieser Wert der Gleichung der Geraden entnehmen; er beträgt  $x_1 = e + 0,5 \cdot (d - e)$ .

Für ein Potential der Form

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{r} \in \mathcal{V}, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (12)$$

wird näherungsweise für die Dichte

$$\rho(x, y, z) = \rho_c \cdot g(x) \cdot g(y) \cdot g(z) \quad (13)$$

angesetzt.  $\mathcal{V}$  sei ein Quader mit den Kanten  $a, b, c$ . In diesem Fall ist

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq e \text{ oder } x \geq a - e, \\ \frac{x-e}{d-e} & \text{falls } e \leq x \leq d, \\ \frac{(a-d)-x}{d-e} & \text{falls } (a-d) \leq x \leq a - e, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (14)$$



Bei der Berechnung von  $g(y)$  und  $g(z)$  sind die entsprechenden Kantenlängen einzusetzen. Die Berechnung der aus dieser Dichte resultierenden Dichtefläche ergibt mit Hilfe der Transformationsgleichungen (7) für  $\gamma$  den Wert  $\gamma = 1,85 \varepsilon_f^{-1/2}$ . Durch Einsetzen in die Gl. (8) erhält man für die Krümmungsenergie  $E_K = 0,12 \cdot l \cdot A^{1/3} \text{ MeV}$ . Die Krümmungsenergie kugelförmiger Kerne beträgt danach  $1,9 A^{1/3} \text{ MeV}$ , sie ist also positiv. Dieser Wert stellt sicherlich eine Abschätzung nach unten dar, da durch den Näherungsansatz für die Dichte auch Wellenfunktionen außerhalb der Fermikugel in die Rechnung einbezogen werden. Dadurch wird die Dichtefläche vergrößert und  $\gamma$  verkleinert.

Außerdem wurde für eine spezielle Wahl von  $a, b, c$ , nämlich für einen Würfel mit einer Kantenlänge von  $10 \text{ fm}$ ,  $\sigma = \frac{1}{\varepsilon_c} \int dV |g_{\text{gr}}| \rho(r)$  numerisch berechnet. Der dabei benutzte Wert von  $\varepsilon_f = 1,92 \text{ fm}^{-2}$  entspricht der Nukleonendichte in Kernmaterie. Für die Dichte ergibt sich der Ausdruck

$$\rho(x, y, z) = \frac{2}{\pi^3} \int_0^{\varepsilon_f^{1/2}} dk \cdot k^2 \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot \sin^2(k \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot x) \cdot \sin^2(k \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot y) \cdot \sin^2(k \cdot \cos \vartheta \cdot z) \quad (15)$$

Die Berechnung der durch das 6-fache Integral definierten Oberfläche erfordert viel Rechenzeit, nämlich 14 Minuten bei Benutzung der IBM 7094, wenn für die Integration über die Winkel eine 4-Punkt-Gauß-Formel, für die Integration über  $k$  eine 6-Punkt-Gauß-Formel und für die Ausführung der räumlichen Integration eine 24-Punkt-Gauß-Formel verwandt wird.

Als Ergebnis dieser Rechnung erhält man für die Dichtefläche den Wert  $220,56 \text{ fm}^2$ . Daraus ergeben sich  $\gamma = 2,015 \text{ fm}$  und  $E_K = 0,852 \cdot l \cdot A^{1/3} \text{ MeV}$ . Die Krümmungsenergie kugelförmiger Kerne beträgt danach  $E_K = 13,3 \cdot A^{1/3} \text{ MeV}$ .



Die Rechnung sollte eigentlich auch für größere Kantenlängen durchgeführt werden. Um die gleiche Genauigkeit zu erzielen, müßte die Anzahl der Stützstellen bei der Ausführung der räumlichen Integration erhöht werden. Das würde wiederum zu einer starken Vergrößerung der Rechenzeit führen. (Eine Verdopplung der Zahl der Stützstellen, mit denen die räumliche Integration ausgeführt wird, würde bewirken, daß die Rechenzeit um den Faktor 8 vergrößert wird.)

Die beiden Werte für die Krümmungsenergie sind sehr verschieden, die Methoden, die bei der Berechnung benutzt wurden, sind es ebenfalls. Das erste Ergebnis ist unabhängig von der Länge der Kanten, dafür ist in der Rechnung ein sehr einfacher Ansatz für die Dichte benutzt worden. In der numerischen Rechnung wird der richtige Ansatz für die Dichte benutzt, dafür könnte das Ergebnis aber von der speziellen Wahl der Länge der Kanten abhängen. Insbesondere ist die dritte der Transformationsgleichungen (7), nämlich  $L_p = L$ , nur näherungsweise für große Kantenlängen richtig. Eine Korrektur würde sich aber im Sinne einer Vergrößerung der Krümmungsenergie auswirken, da ein kleinerer Wert für  $L$  einen entsprechend größeren Wert für  $\chi$  bedingen würde. Beide Werte der Krümmungsenergie stellen also eine Abschätzung nach unten dar. Der größere dürfte daher am ehesten in der Nähe des wahren Wertes liegen.

Strutinskii<sup>23</sup> hat im Rahmen des statistischen Modells einen Ansatz für die Energie des Kerns als Funktion des Dichteverlaufs entwickelt. Dichteverlauf und Krümmungsenergie werden durch Minimalisierung der Energie bestimmt. Nach dieser Rechnung ist der Koeffizient der Krümmungsenergie genau gleich dem Koeffizienten der Oberflächenenergie.

Die Krümmungsenergie wurde als ein weiterer Term additiv zur Massenformel von Myers und Swiatecki<sup>17,19</sup> hinzugefügt. Es müßten nun eigentlich alle Parameter dieser Massenformel neu ermittelt werden. Insbesondere ist zu erwarten, daß der Koeffizient der Oberflächenenergie geändert werden muß, da bei der Anpassung ein Teil der Krümmungsenergie durch den Oberflächenterm erfaßt wurde. (Es gilt:  $a_5 = a_1 + a_2 \cdot \bar{H}$ , wobei  $\bar{H}$  die über alle Kerne gemittelte Krümmung ist.) Da die Gestalt der Bruchstücke sich sehr stark mit der Masse



ändert, beeinflusst die Einführung des Krümmungsterms in die Massenformel das Energieminimum im Zerreißpunkt als Funktion des Massenverhältnisses der Bruchstücke stärker als eine Veränderung des Koeffizienten der Oberflächenenergie. Daher ist es sinnvoll, zunächst das Energieminimum mit Hilfe der um den Krümmungsterm erweiterten Massenformel zu berechnen, ohne die Parameter der Massenformel neu bestimmt zu haben. Erst jetzt, nachdem es sich gezeigt hat, daß man mit dem Krümmungsterm eine wesentlich bessere Übereinstimmung der Aussagen der Theorie mit denen des Experiments erhält, sollten die Parameter der Massenformel neu angepaßt werden.

Bei dieser neuen Anpassung müßte auch, was bisher nicht geschehen ist, die Gleichgewichtsdeformation der stabilen Kerne berücksichtigt werden. Dieses wird sich im Sinne einer Verkleinerung des Koeffizienten der Oberflächenenergie auswirken, in demselben Sinne also wie die Berücksichtigung der Krümmungsenergie.

Die Tatsache, daß die Summe aus Volumenenergie, Oberflächenenergie und Krümmungsenergie den Beginn einer Potenzreihe in  $\bar{A}^{1/3}$  darstellt, führt zu der Vermutung, daß die Krümmungsenergie in derselben Weise von der Zusammensetzung des Kerns abhängt wie die Volumenenergie und die Oberflächenenergie. Auch der Krümmungsterm ist daher mit dem Faktor  $\left(1 - \kappa \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2\right)$  versehen worden.



### 3.4. Parametrisierung der Kernoberfläche

Die verschiedenen möglichen Gestalten, die der Kern im Verlauf der Spaltung annehmen kann, sollen durch eine Funktion mit möglichst wenig Parametern dargestellt werden. Von Lawrence<sup>24</sup> stammt der Vorschlag, hierzu die analytische Form

$$\rho^2(z) = a \cdot z^4 + b \cdot z^2 + c \quad (1)$$

zu verwenden.  $\rho$  und  $z$  sind Zylinderkoordinaten. Für die Gestalt der Kerne ist Rotationssymmetrie um die  $z$ -Achse angenommen. In der vorliegenden Arbeit sollten auch asymmetrische Deformationen untersucht werden. Es müssen daher die Terme mit ungeraden Potenzen von  $z$  hinzugezogen werden. Der Zerreißpunkt ist durch eine doppelte Nullstelle der Form (1) gekennzeichnet. Die doppelte Nullstelle wird in den Koordinatenanfangspunkt gelegt. Es verbleiben noch drei freie Parameter, von denen zwei durch die Angabe der Massen der Bruchstücke bestimmt werden. Für die Festlegung der Gestalt der Bruchstücke verbleibt danach nur noch ein Parameter. Um die Gestalt der Bruchstücke unabhängig von einander variieren zu können, wird die Form (1) in der folgenden Modifizierung verwandt:

$$\rho^2(z) = \gamma \cdot (z - z_A) \cdot (z_B - z) \cdot z^2 \quad (2)$$

$$\text{mit } \gamma = \begin{cases} \alpha & \text{für } z < 0 \\ \beta & \text{für } z \geq 0 \end{cases}.$$

Die Minima der potentiellen Energie im Zerreißpunkt wurden mit dieser Parametrisierung und der ersten Fassung der Massenformel berechnet. Die Parametrisierung in der Form (2) hat den Nachteil, daß die beiden Bruchstücke nicht die Gestalt zweier sich berührender Kugeln annehmen können. Dadurch wird die Schalenkorrektur in ihrer Wirksamkeit von vornherein stark eingeschränkt. Um diesen Nachteil zu vermeiden, werden bei einem großen Teil der Rechnungen die Gestalten der beiden Bruchstücke im Zerreißpunkt durch zwei sich berührende Rotationsellipsoide mit gemeinsamer Achse beschrieben. Als freier Parameter zur Beschreibung der Gestalt eines Bruchstücks dient das Achsenverhältnis des Ellipsoids. Die Minima der potentiellen Energie im Zerreißpunkt wurden mit dieser Parametrisierung sowohl mit der ersten als auch mit der zweiten Version der Massenformel berechnet.



### 3.5. Beschreibung der Rechnung

Das Problem besteht darin, das Minimum der potentiellen Energie im Zerreißpunkt bezüglich der Gestalt der Bruchstücke und ihrer Ladungen bei vorgegebenen Massen der Bruchstücke zu finden. Zu diesem Zweck wird die Energie in eine quadratische Form der eben erwähnten drei Parameter -die Summe der Ladungen der beiden Bruchstücke ist konstant - entwickelt. Die Entwicklungskoeffizienten werden aus der Energie in der Umgebung eines Startwertes berechnet. Durch Differenzieren der quadratischen Form ergibt sich , sofern der Startwert nicht zu weit vom wahren Minimum entfernt ist, ein verbesserter Wert für das Minimum. Dieses Verfahren wird so lange iteriert, bis die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte der Parameter kleiner ist als eine vorgegebene Grenze.

Das Minimum der potentiellen Energie muß sehr genau bestimmt werden, da bei einer Änderung der Gestalt-Parameter sich die gegenseitige Coulombenergie der Bruchstücke, also eine der Größen, die mit experimentellen Ergebnissen zu vergleichen ist, sehr stark im Vergleich zur gesamten Energie ändert. Die zulässige Differenz der Werte der Parameter der beiden letzten Iterationen war so festgelegt, daß die Differenz der gegenseitigen Coulombenergien der Bruchstücke nicht größer war als 0.1 MeV.

Wird die Gestalt eines Bruchstücks durch ein Ellipsoid beschrieben, so können Oberfläche, Krümmung und Coulombenergie eines Fragments in geschlossener Form dargestellt werden. Im anderen Fall müssen diese numerisch berechnet werden. Bei beiden Parametrisierungen müssen  $\delta^2$ , das Maß für die Abweichung von der Kugelgestalt, und die gegenseitige Coulombenergie der Bruchstücke numerisch berechnet werden. Für die Ausführungen der Integrationen wurde die 16-Punkt-Gauß-Formel verwandt.

Für die numerische Berechnung der Coulombenergie wurde die von Lawrence<sup>24</sup> vorgeschlagene Formel verwandt. In dieser sind von den sechs Integrationen drei geschlossen integriert worden, so daß noch drei Integrationen numerisch ausgeführt werden müssen. Um den mit der numerischen Integration verbundenen Fehler möglichst klein zu halten, sind die Gauß-Stützstellen so über das



Integrationsintervall verteilt worden, daß sich in der Umgebung der Berührungsstelle der Bruchstücke möglichst viele Stützstellen befinden.

Die Berechnung der einzelnen Summanden wurde mit einfacher Genauigkeit (11 Stellen) ausgeführt, ihre Addition erfolgte mit 1.5 facher Genauigkeit (16 Stellen). Die Abweichung vom wahren Wert kann für den Fall bestimmt werden, daß die Bruchstücke die Gestalt zweier sich berührender Kugeln haben. Sie tritt in der neunten Dezimalstelle auf, wenn mit 32 Stützstellen gerechnet wird, und in der achten, wenn mit 16 Stützstellen gerechnet wird.<sup>\*)</sup>

Die Berechnung aller Energien für vorgegebene Gestaltparameter und Ladungsverschiebungen erfordert eine Rechenzeit von 5 sec. Die quadratische Form enthält zehn Koeffizienten. Zur Berechnung eines verbesserten Wertes sind demnach 55 sec. erforderlich. Im Durchschnitt wurden etwa sechs Iterationen zur Bestimmung des Minimums der Energie für ein vorgegebenes Massenverhältnis der Bruchstücke benötigt.

---

<sup>\*)</sup> Die Angaben beruhen auf Rechnungen, die mit einer Rechenmaschine vom Typ 3200 der Firma Control Data ausgeführt wurden.



#### 4. Diskussion der Ergebnisse

Da mit wachsendem Atomgewicht der Kerne die Zahl der Neutronen im stabilen Kern schneller zunimmt als die der Protonen, entstehen bei der Spaltung schwerer Kerne Bruchstücke mit einem Überschuß an Neutronen. Würden Protonen und Neutronen im gleichen Verhältnis aufgeteilt, so wäre der Neutronenüberschuß des leichten Fragments größer als der des schweren Fragments. Es ist daher energetisch günstiger, wenn das leichte Bruchstück einen Teil der Neutronen an das schwere abgibt und dafür Protonen aufnimmt. Paarkraft und Schalenenergie können diese Tendenz verstärken oder auch ihr entgegenwirken. Das Ergebnis der Rechnung für  $U^{235} + n$  (s. Abb. 1 und 2) zeigt in der Tat, daß bei fast allen Massen das schwere Bruchstück einen Teil der Protonen an das leichte abgibt.

Die in den Abbildungen 1 bis 9 dargestellten Ergebnisse sind mit der Parametrisierung gewonnen, bei der die Gestalten der Bruchstücke durch Rotationsellipsoide beschrieben werden. In Abb. 1 ist  $\Delta Z$ , die Zahl der Protonen, die das schwere Bruchstück im Mittel an das leichte abgibt, bzw. die, die es aufnimmt, als Funktion der Masse des schweren Bruchstücks aufgetragen.  $\Delta Z$  ist definiert durch:

$$\Delta Z = Z(A_B) - \frac{Z}{A} \cdot A_B$$

Hierbei ist  $A_B$  die Massenzahl des schweren Bruchstücks und  $Z(A_B)$  die Zahl der Protonen des schweren Bruchstücks im Energieminimum.

$Z$  und  $A$  sind Protonenzahl bzw. Massenzahl des spaltenden Kernes. Ein negativer Wert von  $\Delta Z$  bedeutet, daß das schwere Bruchstück Protonen abgibt. Die in der Abbildung 1 gezeigten Ergebnisse sind mit der zweiten Version der Massenformel berechnet. Sie stimmen über den ganzen Bereich der Massen im wesentlichen gut mit den von Nörenberg<sup>25</sup> berechneten und u.a. von Konecny<sup>3</sup> et. al. sowie von Strom<sup>4</sup> et. al. und Weiß<sup>5</sup> gemessenen Werten überein. Der Schaleneffekt bei der Masse 132 ist von derselben Größe und beschränkt sich auf dasselbe enge Massengebiet wie in den Ergebnissen der Rechnung von Nörenberg<sup>25</sup> und den Meßergebnissen von Konecny<sup>3</sup> et. al. . Die auftretenden sprunghaften Änderungen von  $\Delta Z$  bei Variation der Masse werden jedoch in der vorliegenden Rechnung besser wiedergegeben als in der von Nörenberg<sup>25</sup>.



Bei dem schweren Bruchstück mit der Masse 132 bewirken Paarkraft und Schalenkorrektur, daß im Mittel 1.36 Protonen abgegeben werden und sich die magischen Zahlen 50 und 82 einstellen. Bei der Masse 131 reicht die hier allein wirkende Schalenkorrektur nicht aus, um so viele Protonen zu entfernen, daß die magische Protonenzahl 50 erreicht wird. Daher geht die Zahl der im Mittel abgegebenen Protonen auf 0.7 zurück.

In vielen Fällen ist die zum Energieminimum zugehörige Protonenzahl keine ganze, das Energieminimum kann also gar nicht erreicht werden. Es werden vielmehr die beiden benachbarten ganzen Protonenzahlen mit unterschiedlicher Häufigkeit gebildet. Die Lage des Minimums stellt ein Maß für die Häufigkeit dar. Liegt das Minimum in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen, so dürften diese etwa gleich wahrscheinlich sein. Liegt es dagegen in der Nähe einer ganzen Protonenzahl, so dürfte diese fast ausschließlich angenommen werden. Im Mittel werden für den hierdurch entstehenden Fehler etwa 0.1 Ladungseinheiten zu veranschlagen sein.

Die zweite Version der Massenformel ergibt infolge des Ansatzes  $(1 - 2\theta^2) \cdot e^{-\theta^2}$  für die Funktion, die die Gestaltabhängigkeit der Schalenkorrektur beschreibt, in der Umgebung magischer Zahlen zwei Minima. Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen und zwar sowohl in bezug auf die Ladungen als auch in bezug auf die kinetischen Energien der Bruchstücke erhält man nur, wenn man annimmt, daß die Spaltung in dem Minimum erfolgt, in dem die Deformation, also die Abweichung von der Kugelgestalt, geringer ist. Eine Begründung für dieses Verhalten steht noch aus. Die Rechnungen wurden mit den von Myers und Swiatecki angegebenen Koeffizienten durchgeführt. Für den Koeffizienten der Krümmungsenergie wurde in den Rechnungen, deren Ergebnisse in den Abbildungen 1 bis 8 aufgetragen sind, 3 MeV eingesetzt. Dieser Wert lieferte mit der ersten Version der Massenformel gerade den experimentellen Wert der kinetischen Energie im Maximum, also dort, wo die Masse des schweren Bruchstücks 132 ist. Außerdem liegt auch das Ergebnis der ersten groben Abschätzung der Krümmungsenergie aus dem Fermigasmodell in der Nähe dieses Wertes.



In der Abbildung 2 ist der mit Hilfe der ersten Version der Massenformel berechnete Wert von  $\Delta Z$  als Funktion der Masse des schweren Fragments aufgetragen. Es wurden die von Myers und Swiatecki<sup>17</sup> angegebenen Werte für die Parameter der Massenformel verwandt. Lediglich der Wert von  $a/r_c$ , also von dem Koeffizienten, der bestimmt, wie stark die Schalenkorrektur von der Deformation abhängt, mußte geändert werden. Mit dem von Myers und Swiatecki ermittelten Wert von  $a/r_c = 0,24$  ergab sich nämlich, daß die kinetische Energie am größten bei symmetrischer Spaltung sein müßte. Um zu erreichen, daß die kinetische Energie der Bruchstücke zu symmetrischer Spaltung hin abfällt, mußte  $a/r_c$  vergrößert werden. Damit gewinnt die Schalenkorrektur bei größeren Deformationen an Einfluß. Die größte Differenz zwischen der kinetischen Energie im Maximum und der bei symmetrischer Spaltung ergibt sich bei  $a/r_c = 0,78$ . Dieser Wert liegt den in den Abbildungen 2 und 8 gezeigten Ergebnissen zugrunde.

Die Werte von  $\Delta Z$  der Abbildung 2 unterscheiden sich nicht sehr von den in der Abbildung 1 gezeigten. Bemerkenswert ist vor allem, daß die etwas schwächere Schalenkorrektur der ersten Version der Massenformel nicht ausreicht, um bei der Masse 132 die magische Protonenzahl 50 zu erzwingen. Gebildet wird nach dieser Rechnung vielmehr die Protonenzahl 48. Die Differenz der Energien dieser beiden Zustände beträgt allerdings nur 0,25 MeV. In die Abbildungen 2 und 8 sind wegen der kleinen Energiedifferenz beide Möglichkeiten eingetragen. Zum Vergleich sei angegeben, daß in der Rechnung mit der zweiten Version der Massenformel der Zustand mit der magischen Protonenzahl 50 ungefähr 1.2 MeV tiefer liegt als der mit der Protonenzahl 48.

Bei den geraden Massenzahlen stimmen die durch Minimalisierung der potentiellen Energie im Zerreißpunkt berechneten Werte von  $\Delta Z$  annähernd mit denen überein, die man aus der Annahme erhält, daß sich der nächstgelegene  $q-q$  Kern bildet. Abbildung 4 zeigt einen Vergleich der von Nörenberg<sup>25</sup> aufgrund dieser Annahme ermittelten Werte von  $\Delta Z$  mit den durch Minimalisierung der Energie berechneten.

Die mit Hilfe des Cluster-Modelles von Faissner<sup>26</sup> berechneten Werte von  $\Delta Z$  zeigen ebenfalls einen ausgeprägten Schaleneffekt bei der Masse 132. Dieser fällt jedoch im Vergleich zu den Meßergebnissen



und zu den Ergebnissen der vorliegenden Rechnung zu größeren Massen des schweren Bruchstückes hin zu langsam ab. Außerdem entspricht die glatte Kurve nicht den auftretenden sprunghaften Änderungen von  $\Delta z$  bei Variation der Masse der Bruchstücke.

Wir vergleichen die mit den beiden Versionen der Massenformel berechneten Gestalten der Bruchstücke. Das mit der zweiten Version der Massenformel berechnete Achsenverhältnis (s. Abb. 5) beträgt bei symmetrischer Spaltung bei beiden Bruchstücken 0,496. Die Bruchstücke sind also etwa doppelt so lang wie breit. Das Achsenverhältnis des schweren Bruchstücks, das zum Maximum der kinetischen Energie gehört, beträgt 0,944, das des zugehörigen leichten Bruchstücks 0,394. Die mit der ersten Version der Massenformel berechneten Werte sind 0,491 sowie 0,549 und 0,461 (s. Abb. 6). Die Werte bei symmetrischer Spaltung unterscheiden sich also nicht sehr viel von einander. Dagegen zwingt die stärkere Schalenkorrektur der verbesserten Massenformel das schwere Bruchstück mit der Massenzahl 132 in eine Gestalt, die einer Kugel sehr viel ähnlicher ist als die, die sich aus der Rechnung mit der ersten Version der Massenformel ergibt. Das zusammen mit dem Bruchstück der Masse 132 entstehende Bruchstück der Masse 104 ist infolgedessen nach der zweiten Version der Massenformel stärker gestreckt als nach der ersten.

Die Übereinstimmung zwischen berechneten und experimentell bestimmten Werten ist bei der kinetischen Energie nicht so gut wie bei den Ladungen. Ein Vergleich der mit der zweiten Version der Massenformel berechneten und der von Schmitt<sup>2</sup> et. al. gemessenen Werte in Abbildung 7 zeigt, daß das Maximum der berechneten Kurve zu breit ist und zu hoch liegt. Dagegen ist die Differenz der maximalen kinetischen Energie und der bei symmetrischer Spaltung zu gering, nämlich nur 16 MeV anstelle der gemessenen 24 MeV. Etwa von der Masse 140 ab verläuft die berechnete Kurve parallel zur gemessenen. In der Umgebung der Massen 125 und 138 ändert sich die kinetische Energie der Bruchstücke sprunghaft, da sich hier die Schalenkorrektur sehr schnell ändert.

Die mit der ersten Version der Massenformel berechneten Werte der kinetischen Energie sind zusammen mit den Meßwerten von Schmitt<sup>2</sup> et. al. in der Abbildung 8 aufgezeichnet. Die beiden



Kurven decken sich nur in dem Bereich, der sich von dem Bruchstück mit der Masse 128 bis zu dem Bruchstück mit der Masse 141 erstreckt. Die kinetische Energie der Bruchstücke fällt sowohl zu symmetrischer als auch zu größeren Massenverhältnissen hin zu langsam ab.

Die Benutzung des Polynoms 4. Grades zur Beschreibung der Gestalt des Kernes liefert kinetische Energien in der Größenordnung von 140 MeV. Da in dieser Parametrisierung die Möglichkeit nicht enthalten ist, daß die beiden Bruchstücke die Gestalt zweier sich berührender Kugeln annehmen, ist die Schalenkorrektur in ihrer Wirksamkeit stark eingeschränkt. Nur mit größerer Krümmungsenergie und mit einem größeren Wert von  $a/r_c$  als der, den Myers und Swiatecki<sup>17</sup> angegeben haben, läßt es sich erreichen, daß die kinetische Energie zu symmetrischer Spaltung hin abfällt. Die Differenz zwischen dem Maximum der kinetischen Energie und der bei symmetrischer Spaltung beträgt etwa 0.6 MeV, wenn für den Koeffizienten der Krümmungsenergie 15 MeV angesetzt wird und  $a/r_c = 0,33$  gewählt wird. Die Differenz der kinetischen Energien ist bei dieser Wahl von  $a/r_c$  am größten.

Die kinetische Energie der Bruchstücke hängt wesentlich von dem Koeffizienten der Krümmungsenergie ab. Dieser kann daher durch optimale Anpassung der berechneten Werte der kinetischen Energie an die gemessenen bestimmt werden. Die Anpassung wurde so vorgenommen, daß die gemessene Differenz der maximalen kinetischen Energie und der bei symmetrischer Spaltung möglichst gut wiedergegeben wurde. Diese Differenz dürfte nicht so stark von der speziellen Auswahl der möglichen Gestalten der Bruchstücke abhängen wie die Absolutwerte. Bei Variation des Parameters der Krümmungsenergie ändert sich die Differenz der kinetischen Energien in der folgenden Weise: Je größer der Parameter der Krümmungsenergie wird, desto stärker ist die Tendenz zur kugelförmigen Gestalt der Bruchstücke. Die kinetische Energie der Bruchstücke vergrößert sich folglich mit wachsendem Parameter der Krümmungsenergie. Da die Gestalten der Bruchstücke sich mit ihrer Masse ändern, werden sie von einer Variation des Parameters der Krümmungsenergie in unterschiedlicher Weise beeinflusst. Die beiden Bruchstücke im Maximum der kinetischen Energie besitzen die Massenzahlen 132 und 104. Das annähernd doppelt-magische Bruchstück



mit der Massenzahl 132 ist nahezu kugelförmig und setzt einer Gestaltänderung großen Widerstand entgegen. Der Asymmetrieterm der Krümmungsenergie verschiebt mit wachsendem Parameter der Krümmungsenergie die Nukleonenzahlen dieses Bruchstücks ein wenig in Richtung nicht-magischer Nukleonenzahlen. Daher nimmt die Deformation dieses Bruchstücks mit wachsendem Parameter der Krümmungsenergie sogar geringfügig zu. Das Bruchstück mit der Massenzahl 104 ist infolge der Coulombwechselwirkung mit dem nahezu kugelförmigen Bruchstück der Massenzahl 132 sehr stark elongiert. Infolgedessen hängt seine Gestalt sehr empfindlich von dem Parameter der Krümmungsenergie ab. Bei kleinem Parameter der Krümmungsenergie ändert sich die Gestalt des Bruchstücks mit der Masse 104 so stark, daß die kinetische Energie der Bruchstücke im Maximum der kinetischen Energie schneller zunimmt als die bei symmetrischer Spaltung. Die Differenz der kinetischen Energien nimmt also zunächst mit wachsendem Parameter der Krümmungsenergie zu. Bei größerem Parameter der Krümmungsenergie ändert sich die Gestalt des Bruchstücks mit der Masse 104 langsamer, da es nicht mehr so stark deformiert ist. Da sich bei symmetrischer Spaltung die Gestalten beider Bruchstücke ändern, bei der Spaltung, die zu den Bruchstücken mit den Massen 132 und 104 führt, sich aber lediglich die Gestalt eines der Bruchstücke ändert, nimmt schließlich die Differenz der kinetischen Energien mit wachsendem Parameter der Krümmungsenergie ab. In Abbildung 9 ist die Differenz der kinetischen Energien als Funktion des Koeffizienten der Krümmungsenergie aufgetragen. Das Maximum der Differenz der kinetischen Energien liegt bei  $a_K = 16 \pm 0,5 \text{ MeV}$ . Bei dieser Wahl des Parameters der Krümmungsenergie beträgt die Differenz der kinetischen Energien 20.1 MeV. Zum Vergleich sei noch einmal die von Schmitt<sup>2</sup> et. al. gemessene Differenz von 24 MeV angeführt. Der aus dieser Anpassung gewonnene Parameter der Krümmungsenergie stimmt gut mit dem Wert von 13 MeV überein, der mit Hilfe des Fermigasmodelles berechnet wurde. Bemerkenswert ist, daß auch hiernach die Parameter des Volumenterms, des Oberflächenterms und des Krümmungsterms ziemlich genau gleich groß sind.

Die Ergebnisse dieser Rechnung bestätigen die schon in der Diplomarbeit<sup>16</sup> und in den Arbeiten von Vandenbosch<sup>14</sup> und Fong<sup>15</sup>



geäußerte Vermutung, daß das Maximum der kinetischen Energie bei der Masse 132 des schweren Bruchstückes und der Abfall der kinetischen Energie zu symmetrischer Spaltung hin durch die unterschiedlichen Gestalten der Bruchstücke im Zerreißpunkt hervorgerufen werden.

In Fortführung dieser Arbeit sollten die Parameter der um den Krümmungsterm erweiterten Massenformel neu ermittelt werden, wobei auch die Gleichgewichtsdeformationen der stabilen Kerne berücksichtigt werden müßten. Danach sollten die Ladungen und kinetischen Energien der Spaltprodukte der anderen schweren Kerne ebenfalls berechnet werden.



Herrn Professor Dr. G. Süßmann danke ich sehr herzlich für das lebhafteste Interesse an dieser Arbeit sowie für zahlreiche wertvolle Hinweise und Anregungen. Zu der Abschätzung der Krümmungsenergie hat Herr Dr. E. Hilf viel beigetragen, wofür ihm herzlich gedankt sei.

Mein Dank gilt auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, ohne deren finanzielle Unterstützung die Durchführung der Arbeit nicht möglich gewesen wäre.



Literaturverzeichnis

- 1) O.Hahn, F.Straßmann  
Naturw. 27 (1939) 11 und 89
- 2) H.W.Schmitt, J.H.Neiler und F.J.Walter  
Phys. Rev. 141 (1966) 1146
- 3) E.Konecny, H.Opower, H.Gunther und H.Göbel  
Proceedings of the IAEA Symposium on the Physics and  
Chemistry of Fision, p. 401;  
H.Göbel  
Diplomarbeit, TH München, 1965
- 4) P.O.Strom, G.R.Grant und A.C.Pappas  
Canad. J. Chem. 43 (1965) 2493
- 5) H.V.Weiß  
Phys. Rev. 139 (1965) B 304
- 6) P.O.Strom, D.L.Lore, A.E.Grandale, A.A.Delucchi, D.Sam und  
N.E.Ballon  
Phys. Rev. 144 (1966) 984
- 7) P.Armbruster, D.Hovenstadt, H.Meister, H.J.Specht  
Nuclear Phys. 54 (1964) 586
- 8) N.Bohr, J.A.Wheeler  
Phys. Rev. 56 (1939) 426
- 9) S.Frankel, N.Metropolis  
Phys. Rev. 72 (1947) 914
- 10) W.J.Swiatecki  
Teil I: Phys. Rev. 101 (1956) 651  
Teil II: Phys. Rev. 104 (1956) 993  
Teil III: Proc. 2cn. UN. INT. Conf. Peacefol Uses of Atomic  
Energy, Genf (1958), Paper P/651
- 11) S.Cohen, W.J.Swiatecki  
Teil IV: Anm. Phys. 19 (1962) 67  
Teil V: Anm. Phys. 22 (1963) 406
- 12) J.R.Nix  
Dissertation, University of California, Berkely  
Lawrence Radiation Laboratory Report  
UCRL - 11338 (1964)
- 13) L.Meitner  
Nature London 165 (1950) 561 und  
Ark. Fys. 4 (1952) 383



- 14) R.Vandenbosch  
Nucl. Phys. 46 (1963) 129
- 15) P.Fong  
Phys. Rev. Letters 11 (1963) 375
- 16) R.Schade  
Diplomarbeit, Universität Frankfurt, 1963  
unveröffentlicht
- 17) W.D.Myers, W.J.Swiatecki  
Lawrence Radiation Laboratory Report  
UCRL -11980, 1965
- 18) C.F. von Weizsäcker  
Zeitschr. f. Phys. 96 (1935) 431
- 19) W.D.Myers, W.J.Swiatecki  
Lawrence Radiation Laboratory Report  
UCRL - 17070, 1966
- 20) E.Hilf, G.Süßmann  
Phys. Rev. Letters 21 (1966) 654
- 21) H.Weyl  
Rend. circ. math. pal XXXIX
- 22) W.J.Swiatecki  
Proc. Phys. Soc. A64 (1951) 226
- 23) V.M.Strutinski, A.S.Tyapin  
JETP 18<sup>1</sup> (1964) 664
- 24) J.N.P.Lawrence  
Phys. Rev. 139 (1965) B 1227
- 25) W.Nörenberg  
Zeitschr. f. Phys. 197 (1966) 246
- 26) H.Faissner  
Zeitschr. f. Naturforsch. 21a (1966) 1021
- 27) H.W.Schmitt  
Vortrag anlässlich der "Diskussionstagung über Neutronenphysik  
an Forschungsreaktoren" in Jülich 1967
- 28) G.Süßmann  
Vortrag anlässlich der "Diskussionstagung über Neutronenphysik  
an Forschungsreaktoren" in Jülich 1967



## 6. Erläuterung der Abbildungen

Abb.1: Die mit Hilfe der verbesserten Massenformel berechneten Werte von  $\Delta Z$  sind, durch  $\times$  gekennzeichnet, als Funktion der Masse der schweren Bruchstücke aufgetragen. Im übrigen ist die Abbildung der Arbeit von Nörenberg<sup>25</sup> entnommen. Die gestrichelte Linie stellt die von Nörenberg berechneten Werte dar. Zum Vergleich sind eingetragen die von Konecny<sup>3</sup> et. al. ( $\bullet$ ), Strom, Grant und Pappas<sup>4</sup> ( $\circ$  und  $\Delta$ ), Weiß<sup>5</sup> ( $\square$ ), Strom<sup>6</sup> et. al. ( $\Delta$ ) und Armbruster<sup>7</sup> et. al. ( $\Lambda$ ) gemessenen Werte.

Abb.2: In dieser Abbildung stellen die durch  $\times$  bezeichneten Punkte die mit der ersten Version der Massenformel berechneten Werte von  $\Delta Z$  als Funktion der Masse der schweren Bruchstücke dar. Die Bedeutung der übrigen Kurven und Punkte ist aus der Erläuterung der Abb.1. zu entnehmen.

Abb.3: In dieser Abbildung ist der Verlauf der Spaltung veranschaulicht.  $\mathcal{L}$  sei ein Satz von Parametern, der die Gestalt des Kernes festlegt. Die Dimension des Parameterraumes ist in diesem Beispiel 2. Mit  $h$  ist der Grundzustand des spaltenden Compoundkernes und mit  $S$  der Sattelpunkt bezeichnet.  $Z$  sei die Linie, an der der Kern auseinanderreißt. Die Bahn  $B$  sei eine Lösung der Bewegungsgleichung.

Abb.4: Diese Abbildung zeigt, daß die mit Hilfe der verbesserten Massenformel berechneten Werte von  $\Delta Z$ , gekennzeichnet durch ( $\bullet$ ), bei geraden Massenzahlen annähernd mit den Werten ( $\circ$ ) übereinstimmen, die man aus der Annahme erhält, daß sich der nächstgelegene  $q-q$  Kern bildet.



- Abb.5: In dieser Abbildung sind einige der mit der verbesserten Massenformel berechneten Gestalten der Bruchstücke im Zerreißpunkt aufgezeichnet. Das obere Paar stellt die Bruchstücke im Maximum der kinetischen Energie dar (die Masse des schweren Bruchstücks ist 132) und das untere Paar die Bruchstücke bei symmetrischer Spaltung.
- Abb.6: Die Massen der hier gezeigten Bruchstücke sind dieselben wie die der Abbildung 5. Ihre Gestalten sind jedoch mit der ersten Version der Massenformel berechnet.
- Abb.7: Die mit Hilfe der verbesserten Massenformel berechneten kinetischen Energien der Bruchstücke sind als Funktion der Massen der Bruchstücke aufgetragen ( $\times$ ). Zum Vergleich sind die von Schmitt<sup>2</sup> et.al. gemessenen Werte der kinetischen Energie angegeben ( $\bullet$ ).
- Abb.8: In dieser Abbildung sind die mit Hilfe der ersten Version der Massenformel berechneten Werte ( $\times$ ) sowie die von Schmitt<sup>2</sup> et.al. gemessenen Werte ( $\bullet$ ) der kinetischen Energie der Bruchstücke als Funktion der Massen der Bruchstücke aufgetragen.
- Abb.9: In dieser Abbildung ist die Differenz der maximalen kinetischen Energie und der kinetischen Energie bei symmetrischer Spaltung als Funktion des Koeffizienten der Krümmungsenergie aufgetragen.



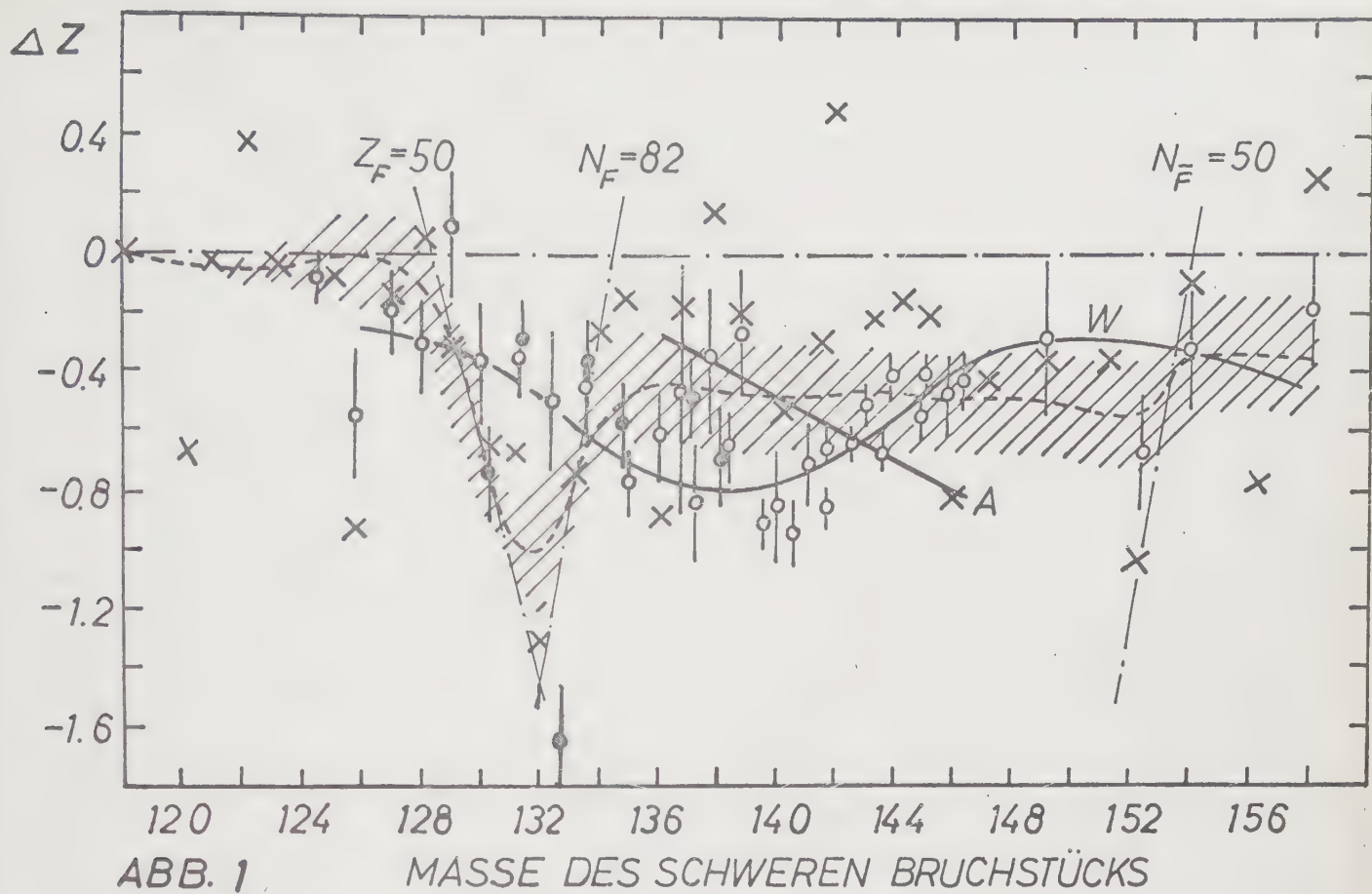


ABB. 1

MASSE DES SCHWEREN BRUCHSTÜCKS

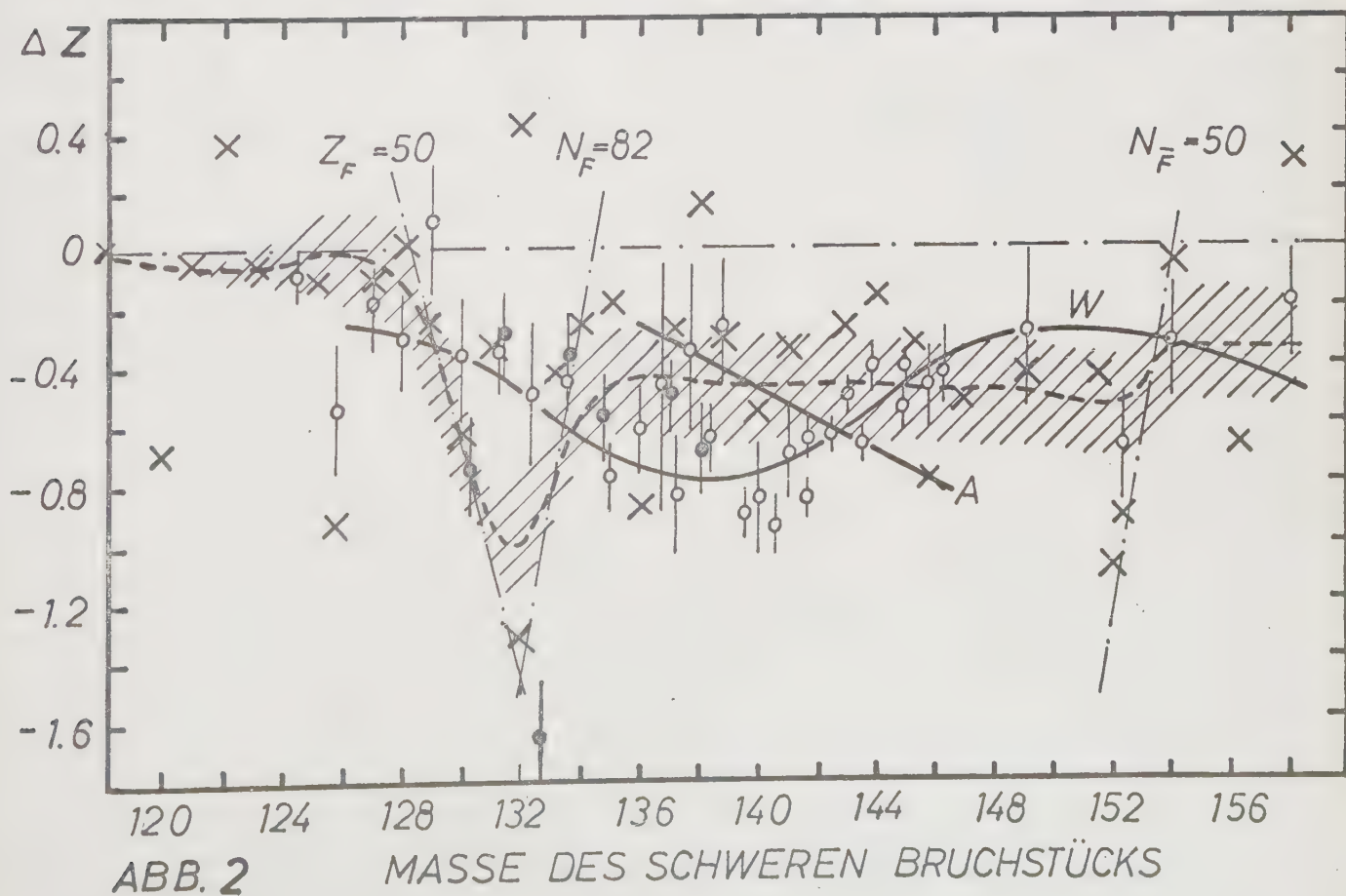


ABB. 2

MASSE DES SCHWEREN BRUCHSTÜCKS



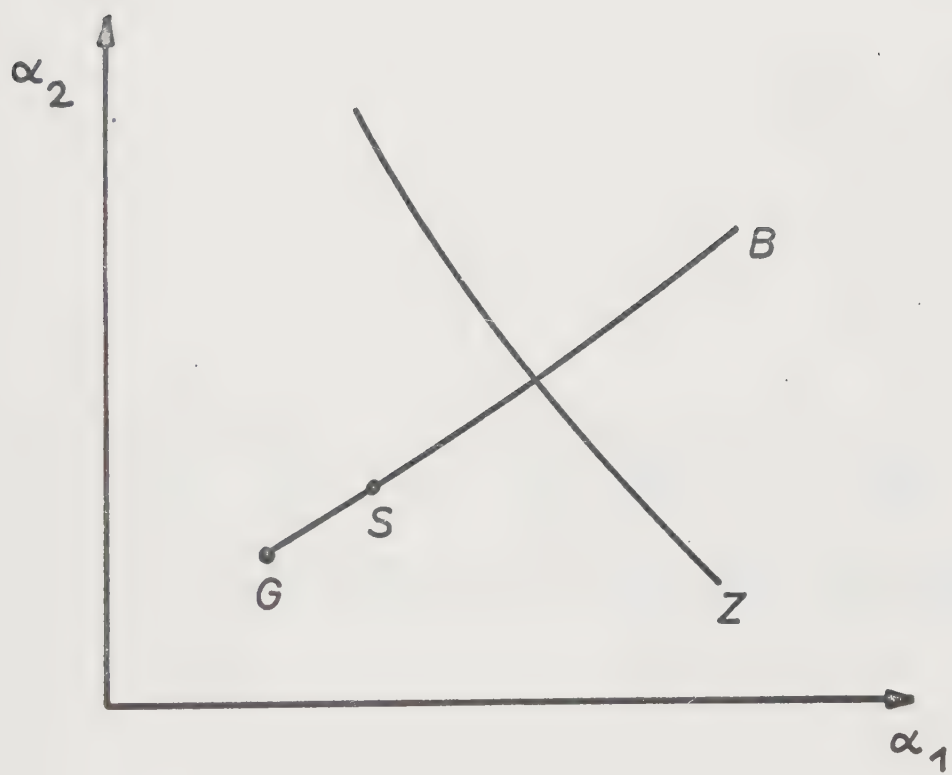


ABB. 3



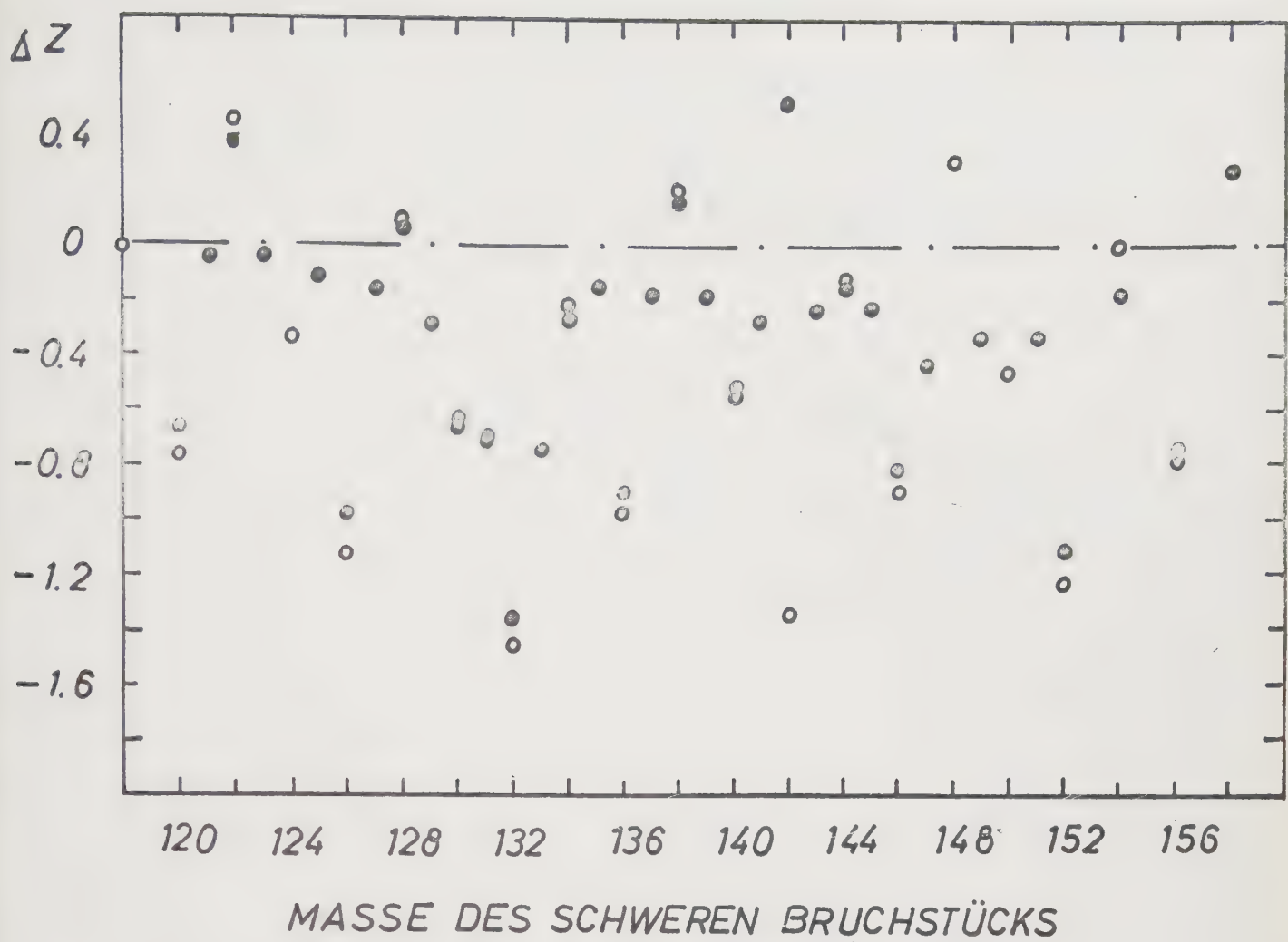


ABB. 4



GESTALTEN DER BRUCHSTÜCKE IM  
ZERREISSPUNKT

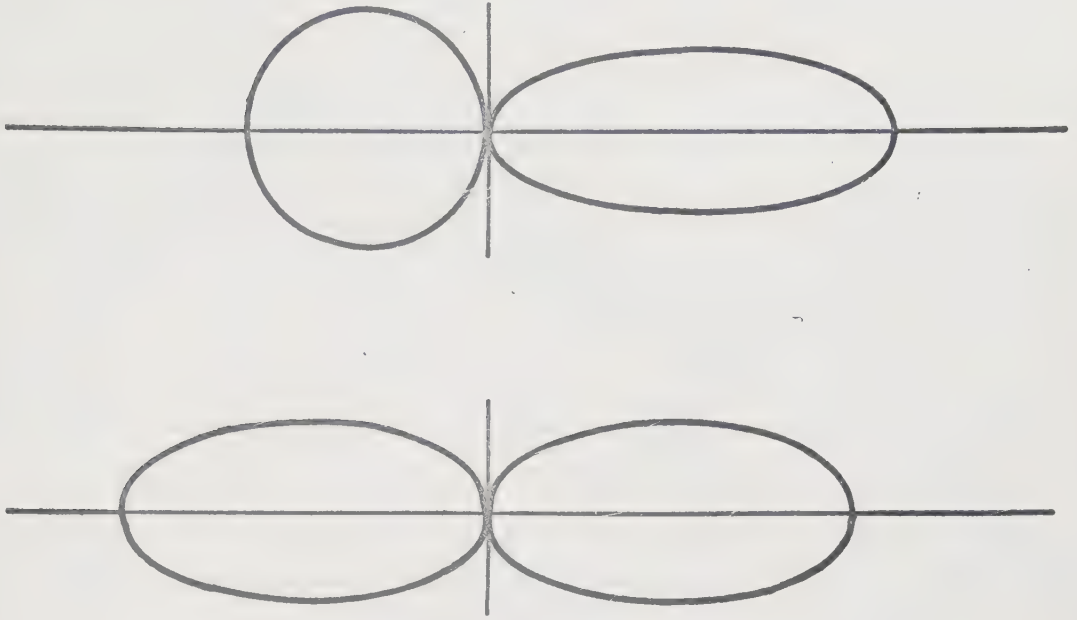


ABB. 5

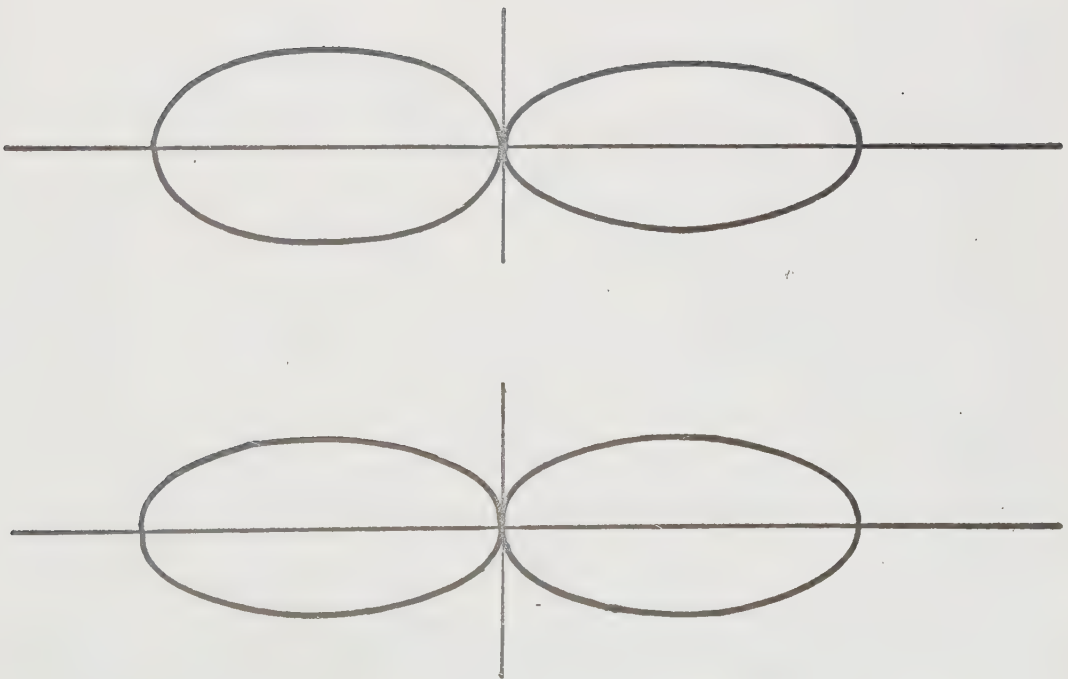
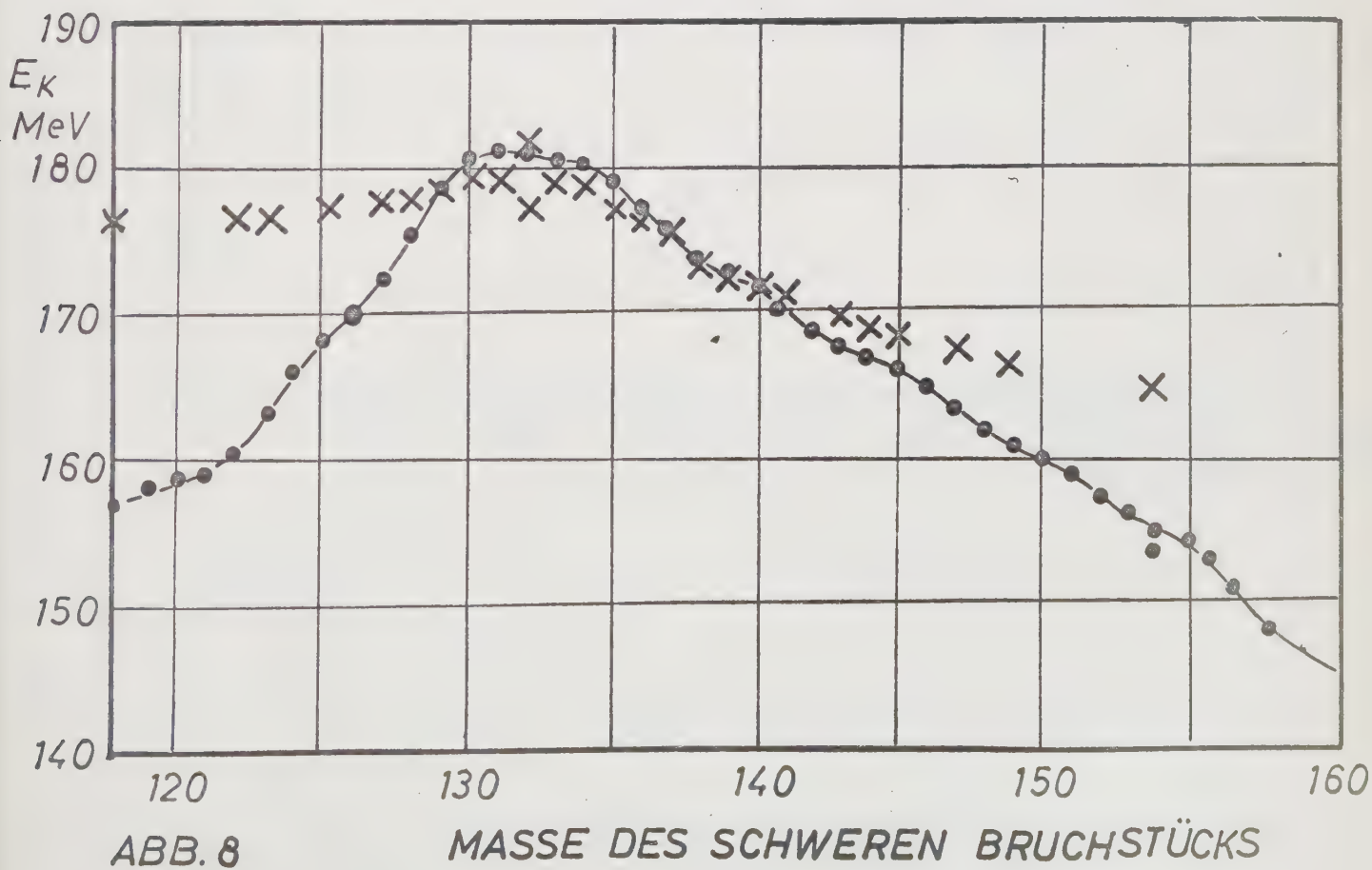
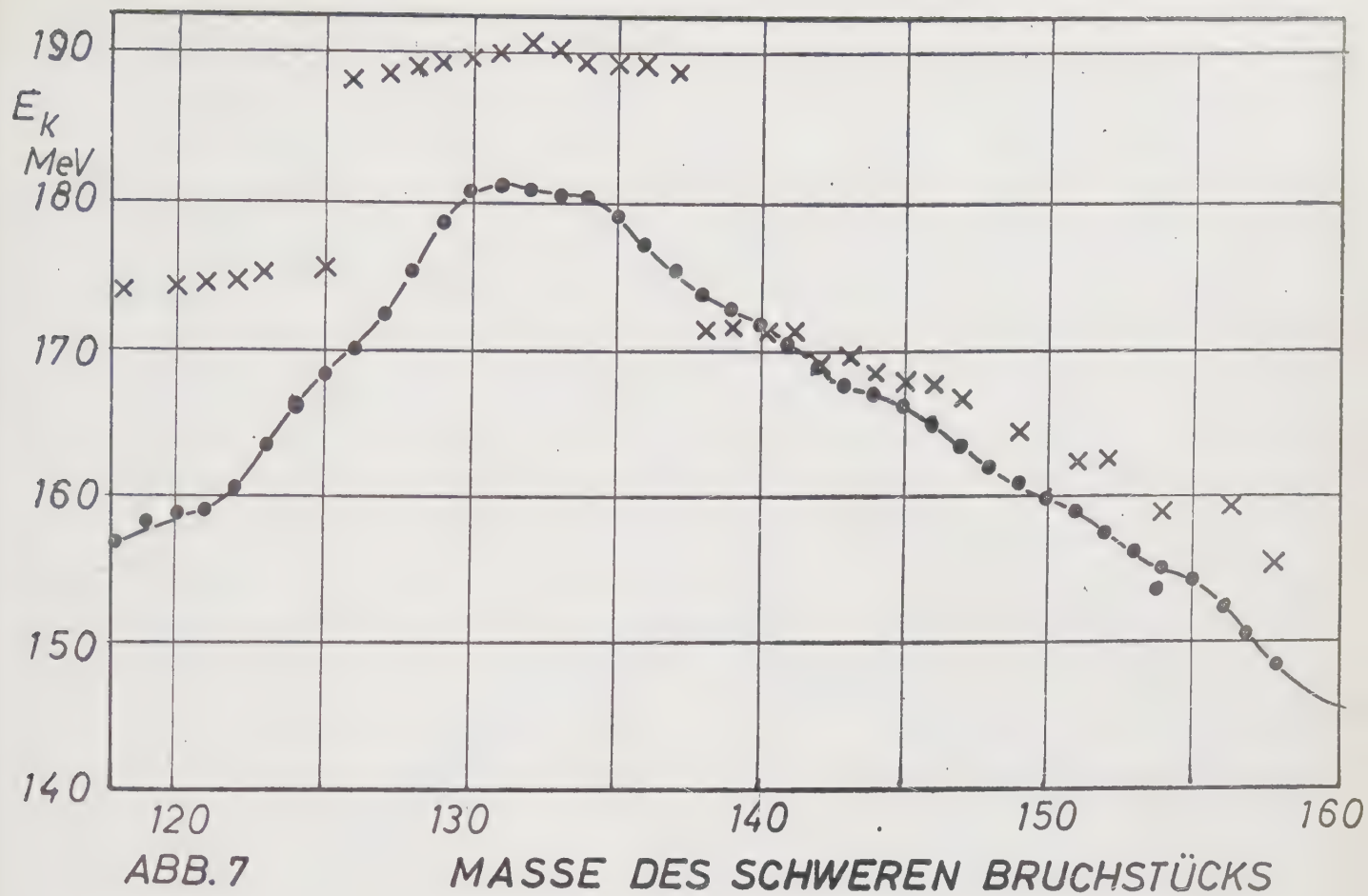


ABB. 6

Maßstab: 1cm = 4 fm







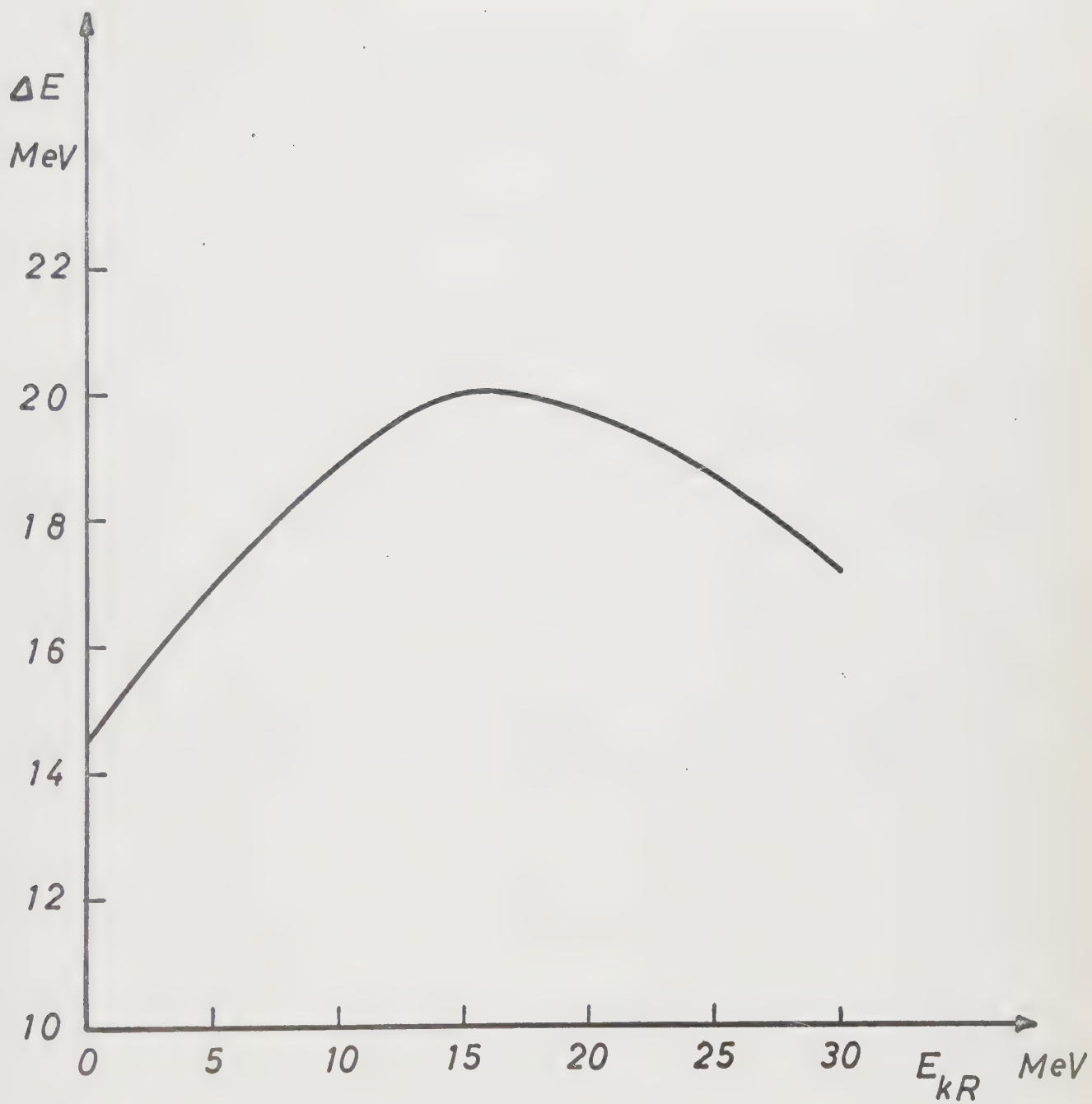


ABB. 9



## Lebenslauf

Am 9.4.1936 wurde ich in Helmstedt als erstes Kind des Studienrates Erich Schade und seiner Ehefrau Helene geb. Riechers geboren. Im Herbst 1942 wurde ich in die Volksschule in Schöningen bei Helmstedt eingeschult. Vom Frühjahr 1947 bis zum Erreichen der "Mittleren Reife" im Frühjahr 1953 besuchte ich das Gymnasium in Schöningen und von da ab bis zur Ablegung der Reifeprüfung im März 1956 das Gymnasium in Helmstedt. Im SS 1956 begann ich an der Georg-August-Universität in Göttingen Physik und Mathematik zu studieren. Am 6.11.1958 bestand ich dort das Vorexamen in Physik. Zum SS 1959 ließ ich mich an der Johann-Wolfgang-Goethe Universität einschreiben. Im WS 1960/61 begann ich bei Herrn Professor Dr. E.Schopper mit der Anfertigung einer Diplomarbeit über Untersuchungen an Spaltprodukten, die ich am 18.12.1963 mit der Diplomprüfung abschloß. Bald darauf wurde ich Doktorand bei Herrn Professor Dr. G.Süßmann.

Im Januar 1965 heiratete ich Ingeborg Dreßler, die Tochter von Dr. Karl Dreßler und seiner Ehefrau Anneliese geb. Gildemeister. Inzwischen wurden uns zwei Söhne, Wolfgang und Burkhard, geboren.



Meine akademischen Lehrer waren die Professoren:

Hilsch, Buckel, Reidemeister, Lyra, Brockmann, Glemser, Hund,  
Flammersfeld, Meyer, Martienssen, Mrowka, Schütze, Behrens,  
Sauer, Schopper, Dänzer, Geppert, Czerny, Genzel, Rössle, Beck,  
Steinwedel, Franz, Süßmann, Rodenberg, Ebert.





